Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 2 Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$ et X la variable aléatoire définie par $X = \dfrac{1+U}{1-U}$.

1. Déterminer la densité de la variable aléatoire X.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 3 Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{3}{4}\exp(-|x+2y| - |x-y|).$$

Calculer la densité de la loi de $(X+2Y, X-Y)$ puis les densités des lois de X et Y.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi de densité

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Montrer $\frac{1}{X}$ est de même loi que X.

Exercice 5 Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.
2. Calculer la loi de la variable aléatoire $Z = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

Exercice 6 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ $p.s.$ Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

Exercice 7

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_0 = T_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = n - S_n.$$

(a) Pour $n \geq 1$, préciser la loi des variables aléatoires S_n et T_n.

(b) Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0, T_n = 0)$. S_n et T_n sont-elles indépendantes?

3. Soit N une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega), \quad V(\omega) = T_{N(\omega)}(\omega) = N(\omega) - U(\omega).$$

(a) Justifier l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S_n = k, N = n).$$

(b) En déduire que U suit la loi de Poisson de paramètre λp.

(c) Déterminer la loi de $1 - X_1$ puis, préciser la loi de V .

(d) Montrer que, pour $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(U = k, V = l) = \mathbb{P}(N = k + l)\mathbb{P}(S_{k+l} = k)$.

(e) En déduire que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Exercice 8 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On rappelle que, $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{X_1} de X_1.

2. En déduire la loi de la somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Exercice 9 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$. On note, pour $n \geq 1$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. Calculer, pour tout $n \geq 1$, la fonction caractéristique de Y_n et préciser sa loi.

2. Déterminer la fonction caractéristique de Y ainsi que sa loi.

Exercice 10 On considère la fonction Gamma définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$

On appelle loi $\gamma(a,\beta)$ de paramètres a et β ($a > 0$ et $\beta > 0$) la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f_{a,\beta}(x) = \frac{\beta^a}{\Gamma(a)}e^{-\beta x}x^{a-1}1_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(a,\beta)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$, $\beta > 0$. Montrer par récurrence que la loi de la somme $X_1 + X_2 + ... + X_n$ est la loi $\gamma(n,\beta)$.

3. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi $\gamma(a,\beta)$ et $\gamma(b,\beta)$ respectivement.

   a. On pose $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Montrer que $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$.

   b. En déduire que : $\forall u > 0,\ \int_0^u x^{a-1}(u-x)^{b-1}dx = u^{a+b-1}\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

   c. Déterminer la loi de $X+Y$.

4. Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes de loi $\gamma(a,\beta)$.

   a. Déterminer la loi de βX et vérifier que la v.a. $\dfrac{X}{X+Y}$ est bien définie.

   b. Montrer que $X+Y$ et $\dfrac{X}{X+Y}$ sont des v.a. indépendantes.

5. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

   a. Montrer que Y_1^2 suit la loi gamma $\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

   b. Montrer que $Y_1^2+Y_2^2+...+Y_n^2$ suit une loi $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.
   La loi $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ est également appelée loi Khi-deux à n degrés de liberté et notée $\chi^2(n)$.