Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{u_m,\ m \geq n\}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \inf(A_n)$ et $W_n = \sup(A_n)$. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes.

2. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\geq 0} \inf\limits_{m\geq n} u_m$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{m\geq n} u_m$.
Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour les suites $(u_n)_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_n = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 Soient x un nombre réel et $(u_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$, où $[x]$ représente la partie entière d'un réel x.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers x.
On pose $a_0 = u_0 = [x]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$.

2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$. Montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes qui convergent vers x avec $u_n \leq x \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
u_n est appelée l'approximation décimale par défaut à 10^n près de x et v_n l'approximation décimale par excès à 10^n près.

Exercice 3 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisables et $\mathcal{C}$ une partie de E telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Montrer que X est une varibales aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ si et seulement si $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Exercice 4 Soit $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ telle que

$$\mathbb{P}(]a,b]) = b - a,\ \text{si}\ 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Cette mesure est appelé mesure de probabilité uniforme. Montrer que :

1. $\forall x \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

2. $\mathbb{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.

3. $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 0$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble non dénombrable de Cantor.

Exercice 5 Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ un espace mesuré, où $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ est la tribu borélienne et λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que :

1. $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a,\ \text{si}\ a \leq b$.

2. Si $O \neq \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(O) > 0$.

3. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(K) < +\infty$.

4. Donner un exemple d'un ensemble de Borel E non dénombrable mais $\lambda(E) = 0$.

Exercice 6 Si $|X|$ est une variable aléatoire, est-ce que X est nécessairement une variable aléatoire?

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$ sont des variables aléatoires réelles.

Exercice 8 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit, pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \text{le nombre d'entiers } k \in \{1, ..., n\} \text{ tels que } X_k(\omega) = 1.$$

1. Déteminer la loi de S_n . Les variables $(S_n)_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes?
2. On définit, pour tout $\omega \in \Omega$,

   $$T_1(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = 1\},$$

   avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Déterminer la loi de T_1.

Exercice 9 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et F la fonction de répartition de X_1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire définie par

$$Z_k = \max(X_i : 1 \leq i \leq k) = \max(X_1, X_2, ..., X_k).$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F et k.
2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_i : 1 \leq i \leq N)$
   (a) Justifier l'égalité, pour $x \in \mathbb{R}$,

   $$\{Z \leq x\} = \bigcup_{k\geq 1} \Big(\{Z_k \leq x\} \bigcap \{N = k\}\Big).$$

   (b) En déduire que la fonction de répartition H de Z est donnée par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{k\geq 1} (F(x))^k \ \mathbb{P}(N = k).$$

   (c) Déterminer H dans le cas où X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, *i.e.* $\mathbb{P}(N = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Exercice 10

1. Soient X une variable aléatoire positive et $a > 0$. Démontrer l'inégalité de Markov

   $$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et $r > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

   (a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov, que pour tout $0 < \lambda < 1$,
$$\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq 1 + r\Big] \leq \mathbb{P}\Big[e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(1+r)}\Big] \leq \left(\frac{\mathbb{E}e^{\lambda X_1}}{e^{\lambda(1+r)}}\right)^n.$$

   (b) En déduire que $\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq 1 + r\Big] \leq (1 + r)^n e^{-nr}$.

Exercice 11 Soit Ω un ensemble. Une famille $\mathcal{M}$ de parties de Ω est appelée une classe monotone si

i. $\Omega \in \mathcal{M}$,

ii. si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subseteq A$, alors $A \backslash B \in \mathcal{M}$,

iii. $\mathcal{M}$ est stable par réunion monotone croissante *i.e.* si $A_i \in \mathcal{M}$ et $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$.

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on note $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ la classe monotone engendree par $\mathcal{E}$, c'est à dire l'intersection de toute les classes monotones contenant $\mathcal{E}$.

1. Vérifier qu'une tribu est une classe monotone et qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.

2. Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω stable par intersection finie.

   (a) Soit $A \in \mathcal{E}$ quelconque, vérifier que $\mathcal{M}_1 = \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$.

   (b) Soit $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ quelconque, vérifier que $\mathcal{M}_2 = \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$.

   (c) En déduire que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

3. Soient $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω stable par intersection finie et $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles sur Ω vérifiant les propriétés suivantes

   j. $1_\Omega \in \mathcal{H}$,

   jj. $\forall A \in \mathcal{E}$, $1_A \in \mathcal{H}$

   jjj. $\mathcal{H}$ est stable par convergence monotone bornée *i.e.* la limite de toute suite croissante et bornée $(f_n)_n$ de $\mathcal{H}$ est aussi dans $\mathcal{H}$.

   (a) Soit $S = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : 1_A \in \mathcal{H}\}$. Montrer que S est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$.

   (b) Montrer que $\mathcal{H}$ contient toute les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(\mathcal{E})-$mésurables.

4. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités définit sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{E}))$. Montrer que si $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ sur $\mathcal{E}$, alors $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ sur $\sigma(\mathcal{E})$.