

**Exercice 1 :**

1. Calculer l'intégrale  $I = \int_{\Gamma} \bar{z} dz$ , où  $\Gamma$  est le chemin joignant le point  $(1, 1)$  au point  $(2, 4)$  le long de la parabole d'équation  $y = x^2$ .
2. Calculer l'intégrale  $I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z) dz$ , où  $\Gamma$  est définie par  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  du point  $(2, 0)$  au point  $(0, 2)$ .
3. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs et  $\Gamma$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  
Calculer  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ . En déduire la valeur de  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$ .

**Exercice 2 :** Déterminer la nature des singularités isolées des fonctions suivantes et préciser la valeur des résidus :

a)  $\frac{1 - \cos(z)}{z^2}$     b)  $\tan(z)$     c)  $\frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3}$     d)  $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$ .

**Exercice 3 :** Soient les fonction  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

1. Déterminer les développements de  $f$  et  $g$  en série de Laurent en 0 dans les trois cas suivant :
  - (a)  $0 < |z| < 1$ ,
  - (b)  $1 < |z| < 2$ ,
  - (c)  $|z| > 2$ .
2. Calculer  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , où  $\gamma$  est le cercle de centre  $\frac{-3}{2}$  et de rayon 1.

**Exercice 4 :** Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ .

1. Etablir la convergence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

On Considère la fonction complexe définie par

$$g(z) = z^{\frac{1}{3}} \frac{z^2 - 1}{(z^2 + 1)^2}, \quad \text{avec} \quad z^{\frac{1}{3}} = |z|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i \arg(z)}{3}}.$$



2. En utilisant un développement en série de Taylor, calculer le résidu de  $g$  au point  $z_0 = i$ .

Soient  $R$  et  $r$  deux réels tels que  $0 < r < 1 < R$ . On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[-R, -r]$ , le demi-cercle supérieur  $C_{r-}$  de centre 0 et de rayon  $r$ , le segment  $[r, R]$  et le demi-cercle supérieur  $C_{R+}$  de centre 0 et de rayon  $R$ .

3. Montrer que  $\left| \int_{C_{R+}} g(z) dz \right| \leq \pi R^{\frac{4}{3}} \frac{R^2 + 1}{(R^2 - 1)^2}$ . En déduire  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_{R+}} g(z) dz$ .

4. Trouver  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r-}} g(z) dz$ .

5. Calculer  $I$ .

**Exercice 5 :** Soit  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2 + 1)} dx$ .

1. Montrer que  $I$  est une intégrale convergente.

Soit  $f$  la fonction complexe définie par  $\frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)}$ . On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[-R, -r]$ , le demi-cercle supérieur  $C_{r-}$  de centre 0 et de rayon  $r$ , le segment  $[r, R]$  et le demi-cercle supérieur  $C_{R+}$  de centre 0 et de rayon  $R > 0$ .

2. Etudier les singularités de  $f$  et donner les résidus correspondants puis calculer  $\int_{\gamma^+} f(z) dz$  suivant les valeurs de  $R$ .

3. (a) Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$  et que  $\int_0^{\pi} e^{-R \sin(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{R}$ .

(b) Pour  $R > 1$ , montrer que  $\left| \int_{C_{R+}} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{R(R^2 - 1)}$ .

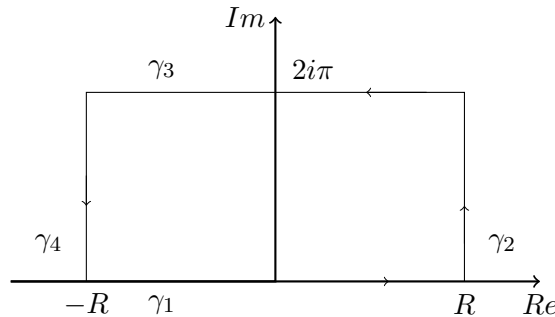
4. Donner  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r-}} f(z) dz$ .

5. En déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 6 :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{1 + e^x}$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

1. Montrer que  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  est convergente.

Dans la suite, on considère la fonction complexe définie par  $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1 + e^z}$  et  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  le contour fermé suivant :



2. Quels sont les pôles de  $f$ . En utilisant un développement de  $e^z$  au voisinage de  $i\pi$ , donner le résidu de  $f$  au point  $z_0 = i\pi$ .
3. Montrer que  $\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{\lambda R}}{e^R - 1}$ . En déduire  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz$ .
4. Montrer que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_4} f(z) dz = 0$ .
5. Déduire que  $I = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$ .

**Exercice 7 :** Soit la fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$ .

1. Etablir la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

On considère la fonction complexe  $f(z) = \frac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z^2)^2}$ , où

$$\ln(z) = \ln|z| + i\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i \arg(z)}{2}}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \arg(z) = \theta < 2\pi.$$

Soient  $R$  et  $r$  deux réels tels que  $0 < r < 1 < R$ . On considère  $\gamma^+$  le contour formé par le segment  $[-R, -r]$ , le demi-cercle supérieur  $C_{r^-}$  de centre 0 et de rayon  $r$ , le segment  $[r, R]$  et le demi-cercle supérieur  $C_{R^+}$  de centre 0 et de rayon  $R$ .

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de  $f$  au point  $z_0 = i$  et donner le résidu correspondant puis calculer  $\int_{\gamma^+} f(z) dz$ .
3. Montrer que  $\left| \int_{C_{R^+}} f(z) dz \right| \leq \pi \sqrt{R} \frac{(\ln(R) + \pi)}{(R^2 - 1)^2}$ . En déduire  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_{R^+}} f(z) dz$ .
4. Trouver une majoration de  $\int_{C_{r^-}} f(z) dz$ . En déduire  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_{r^-}} f(z) dz$ .



5. Calculer les valeurs de  $I$  et  $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$ .

**Exercice 8 :** Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2 + \sin(\theta)} d\theta.$$