Exercice 1 : Calculer les deux intégrales doubles suivantes:

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}dxdy, \qquad J = \iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 2 : On note par $\Delta = [0,1] \times [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n = \iint_\Delta \frac{(xy)^n}{1+xy}dxdy.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. En déduire une expression de $I = \iint\limits_\Delta \frac{1}{1+xy}dxdy$, comme somme d'une série numérique.
3. Soit f la fonction 2π-périodique telle que : $\forall x \in [-\pi,\pi], f(x) = x^2$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ on a: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$. En Déduire la valeur de I.

Exercice 3 : Soit l'ensemble suivante :

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\Big\}.$$

1. Tracer D.
2. Montrer que D est une partie quarrable.
3. Calculer l'intégrale double suivante :

$$J = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Exercice 4 : Soit a un réel strictement positif, on définit les deux ensembles suivants :

$$K_a = [0,a] \times [0,a], \qquad D_a = \Big\{(x,y) \in ([0,+\infty[)^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\Big\}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss suivante : $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

1. Montrer que : $I = \lim\limits_{a\to+\infty} \iint\limits_{K_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Calculer $\iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

2. En remarquant que $D_a \subset K_a \subset D_{a\sqrt{2}}$, calculer I.

Exercice 5 : Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. Soit D le pavé $[0,1] \times [0,1]$. Montrer que $I = \iint_D \frac{xdxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$.

2. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que
$$2I = \iint_D \frac{(x+y)dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

3. Déduire la valeur de I.

Exercice 6: Calculer l'intégrale double suivante :
$$I = \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy,$$
où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \geq 1,\ \ 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 7 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x|+|y| \leq 2\Big\}.$$

1. Tracer D et prouver que c'est une partie compacte quarrable de $\mathbb{R}^2$.

2. Claculer $J = \iint_D dxdy$.

3. Calculer $I = \iint_D \frac{dxdy}{(|x|+|y|)^2+4}$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \iint_D (yx^2+y^3)dxdy$, avec $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 3,\ y \geq 0\Big\}$.

2. $J = \iint_D \frac{dxdy}{2+e^{-x^2-4y^2}}$, avec $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 16,\quad x \geq 0 \ \ y \geq 0\Big\}$.

3. $K = \iint_D (x+y)^2 dxdy$, avec $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ \ x^2+y^2-x \leq 0,\ x^2+y^2-y \geq 0\right\}$.

Exercice 9 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$D = \left\{(x,y) \in (]0,+\infty[)^2 \mid x \leq y \leq 2x \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\right\}.$$

1. Tracer D .
2. Montrer que le changement de variable $\phi : (u,v) \in \Delta \mapsto (x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}) \in D$ où Δ est un domaine à déterminer, est un C^1-difféomorphisme.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 10 :

1. Calculer $A = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2)((1+y^2)}$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.
2. Démontrer la convergence des intégrales

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\cos^2(\theta))}{2\cos(2\theta)} d\theta, \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\sin^2(\theta))}{2\cos(2\theta)} d\theta, \quad D = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt.$$

3. Montrer que $A = B$ et calculer $B+C$ et $B-C$ en fonction de D. En déduire les valeurs de C et D.

Exercice 11 :

1. Calculer le volume d'une sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon R.
2. Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D \cos(x) dxdydz, \qquad J = \iiint_\Delta \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz,$$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 < 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq a^2,\ 0 < z < a\}$.

Exercice 12 : Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D (x+y)z dxdydz, \qquad J = \iiint_D \cos(x+y+2z+1) dxdydz,$$

où $D = \{(x,y,z) \in ([0,+\infty[)^3 |\ x+y+2z \leq 2\}$.