

Exercice 1 Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, F sa fonction de répartition et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Si F est continue et strictement croissante, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1} , l'inverse généralisé de F par :

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$Y = \limsup_n \frac{X_n}{\ln n}.$$

Le but est de démontrer que $Y = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\lambda} \right\}\right) = 1$. En déduire que $\mathbb{P}\left(Y \geq \frac{1}{\lambda}\right) = 1$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1 + \varepsilon}{\lambda}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1 + \varepsilon}{\lambda} \right\}\right).$$

4. Soit $\varepsilon > 0$, prouver que

$$(a) \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{ \frac{X_n}{\ln n} > \frac{1 + \varepsilon}{\lambda} \right\}\right) = 0.$$

$$(b) \mathbb{P}\left(Y > \frac{1 + \varepsilon}{\lambda}\right) = 0.$$

5. En déduire que $\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{\lambda}\right) = 1$.

6. Montrer que la suite $\left(\frac{X_n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 3 Soit N une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes intégrables de même loi. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est indépendante de la variable N . On pose

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0, \\ \sum_{i=1}^N X_i & \text{si } N \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que Z est une variable aléatoire.



2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
3. On suppose que les variables X_i sont de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ ($P\{X_i = 1\} = p$) et N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la loi de Z .

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la loi de $Y = aX_1$ et calculer sa fonction caractéristique φ_Y .
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
 - (a) Quelle est la loi de S_n .
 - (b) Calculer l'espérance de $Y_n = e^{S_n - \frac{n}{2}}$.
 - (c) Déterminer la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\frac{S_n}{n}$.
 - (d) En déduire la limite presque sûre, lorsque n tend vers $+\infty$, de Y_n .

Exercice 5

1. Soit $(p_n)_n$ une suite de réels dans $]0, 1[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telles que pour tout n , X_n est une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de poisson de paramètre λ . Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers X .
2. Soit (X_n) une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la limite en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi telle que $\mathbb{E}(X_1)^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n = \frac{S_n}{n}$ et $q_n = [\sqrt{n}]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x .

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \geq 0$.
 - a. Montrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (M_{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.
 - b. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{q_n^2}{n} Z_{q_n} \leq M_n \leq \frac{(q_n + 1)^2}{n} Z_{q_n + 1}.$$

- c. En déduire que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.
2. Montrer que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $Z_n = \frac{1}{S_n}$.



1. Montrer que Z_n converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(\frac{nS_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on donnera la loi.
3. Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer qu'il existe un unique $\phi \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(|N| \leq \phi) = 0.95$.
4. Déterminer β tel que $\mathbb{P}(S_n \in I = [\frac{1}{\lambda} - \beta, \frac{1}{\lambda} + \beta]) = 0.95$.
5. Déterminer α_1 et α_2 tels que $\mathbb{P}(Z_n \in J = [\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2]) = 0.95$
6. Donner J , en fonction de λ inconnu, pour $n = 10000$ et $\phi = 1.96$.

Exercice 8 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer la loi de S_n .
2. Montrer que la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y dont on donnera la loi.
3. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n) \leq 0)$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!}$.