Exercice 1 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces probabilisables et $\mathcal{C}$ une partie de E telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Montrer que X est une varibales aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ si et seulement si $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$ telle que

$$\mathbb{P}(]a,b]) = b - a, \text{ si } 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Cette mesure est appelé mesure de probabilité uniforme. Montrer que :

1. $\forall x \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.
3. $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 0$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble non dénombrable de Cantor.

Exercice 3 Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ un espace mesuré, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne et λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que :

1. $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a$, si $a \leq b$.
2. Si $O \neq \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(O) > 0$.
3. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(K) < +\infty$.
4. Donner un exemple d'un ensemble de Borel E non dénombrable mais $\lambda(E) = 0$.

Exercice 4 Si $|X|$ est une variable aléatoire, est-ce que X est nécessairement une variable aléatoire?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$ sont des variables aléatoires réelles.

Exercice 6 On considère deux variables aléatoires réelles X et Y densités sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi exponentielle de paramètre λ et Y la loi exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?
2. Soit $u > 0$. Trouver la densité la variable aléatoire $S = Y - uX$.
3. On pose $R = \dfrac{Y}{X}$.
   (a) Montrer que pour tout $u \leq 0$, $\mathbb{P}(R \leq u) = 0$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire R.
   (c) Montrer que la variable aléatoire R est une densité et préciser une densité de R
   (d) La variable aléatoire R admet-elle une espérance?

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}$ Dans le cas particulier $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.

Exercice 7 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et F la fonction de répartition de X_1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire définie par

$$Z_k = \max(X_i : 1 \leq i \leq k) = \max(X_1, X_2, ..., X_k).$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la fonction de répartition H_k de Z_k en fonction de F et k.
2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_i : 1 \leq i \leq N)$
   (a) Justifier l'égalité, pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$\{Z \leq x\} = \bigcup_{k\geq 1} \Big(\{Z_k \leq x\} \bigcap \{N = k\}\Big).$$
   (b) En déduire que la fonction de répartition H de Z est donnée par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \sum_{k\geq 1} (F(x))^k \ \mathbb{P}(N = k).$$
   (c) Déterminer H dans le cas où X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et N suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, *i.e.* $\mathbb{P}(N = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Exercice 8

1. Soient X une variable aléatoire positive et $a > 0$. Démontrer l'inégalité de Markov
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$
2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1, et $r > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
   (a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov, que pour tout $0 < \lambda < 1$,
   $$\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{n} \geq 1 + r\Big] \leq \mathbb{P}\Big[e^{\lambda S_n} \geq e^{n\lambda(1+r)}\Big] \leq \left(\frac{\mathbb{E}e^{\lambda X_1}}{e^{\lambda(1+r)}}\right)^n.$$
   (b) En déduire que $\mathbb{P}\Big[\dfrac{S_n}{n} \geq 1 + r\Big] \leq (1 + r)^n e^{-nr}$.