



Exercice 1. Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = -1$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -2$	0.2	0.2	α
$x = 0$	0.1	0.1	0.05
$x = 1$	0.2	0	0.1

1. Calculer la valeur de α .
2. Calculer les lois marginales de X et de Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. La loi conditionnelle $\mathbb{P}(X = x|Y = y)$ de X sachant Y est définie par

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad \text{si } \mathbb{P}(Y = y) \neq 0.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) & \text{si } \mathbb{P}(Y = y) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On suppose maintenant que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et pour des entiers n et m , $\mathbb{P}(X = n|Y = m)$ est la loi binomiale de paramètre m et p . Calculer la loi marginale de X , $\mathbb{P}(X = n)$.

Exercice 3. Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p . On note $Y = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p .
2. En déduire que si X et Z deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Z$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 4. Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de 0,01. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit X le nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.

1. Quelle est la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.
3. On estime le coût d'une réparation à 500 Dhs. Soit Y la variable aléatoire représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations. Exprimer Y en fonction X et calculer $\mathbb{E}Y$ et $Var(Y)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p . On pose $\lambda = np$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixé.

Exercice 6. Au sein d'une population de personnes, 4% mesurent moins de 1,60 m et 12% plus de 1,80 m. Soit X la variable aléatoire qui désigne la taille des personnes. On suppose que X suit une loi normale de paramètres m et σ . Calculer la taille moyenne m de cette population ainsi que son écart type σ .