Exercice 1. Combien peut-on définir sur l'ensemble $\Omega = \{a, b, c\}$ de probabilités $\mathbb{P}$:

1. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \frac{1}{4}$,
2. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$,
3. telles que $\mathbb{P}(\{a, b\}) = \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{3}{4}$.

Exercice 2. Soit S une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, a)$.

1. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $U = S(S-1)$ et en déduire celle de la variable aléatoire $V = S^2$. (Considérer la fonction $f(x) = (x + 1 - a)^n$).
2. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $W = S^3$. (Considérer la variable aléatoire $T = S(S - 1)(S - 2)$.)

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} K\dfrac{(x + \ln(x))}{x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq e \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer K.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si ces réels existent.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \alpha & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Déterminer α.

b. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

c. Calculer $P(X > \frac{1}{2})$ puis $E(X)$.

d. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$. Calculer $E(Y)$.

e. Donner la fonction de répartition F_Y de Y, en fonction de F_X.

Exercice 5. Soit la fonction de densité de probabilité, d'une variable aléatoire X, suivante :

$$f(x) = ax + bx^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Déterminer a et b pour que X soit une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{2}{3}$.
2. Calculer l'écart type de X.

Exercice 6.

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et $x \in [a, b]$. On considère la fonction $H : x \longrightarrow \int_0^x f(t)dt$ et on pose $G(x) = H(\sqrt{x})$. Calculer $G'(x)$.

2. Soit X la variable aléatoire définie par sa fonction densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a. Soit F la fonction de répartition de X, montrer que $F(x) = 1 - F(-x)$.

   b. On pose $Y = X^2$ et soit G la fonction de répartition de Y. Montrer que

$$G(y) = 2\int_0^{\sqrt{y}} f(t)dt, \quad \text{si} \quad y > 0.$$

   c. En déduire la fonction densité g de Y.

   d. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ a(x+b)^2 & \text{si} \quad x \in]-2, 0] \\ cx + d & \text{si} \quad x \in]0, 1] \\ e & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

1. Donner les conditions que doivent vérifier les nombres réels a, b, c, d et e pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X absolument continue.

2. On suppose que $\mathbb{P}(X \leq -1) = 0$. Déduire les valeurs de a, b, c, d et e.