Exercice 1. Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (noté Rh+); s'il ne possède pas ce facteur, il est dit de Rhésus négatif (noté Rh-).
Sur une population P, les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel?
2. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif?
3. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard parmi ceux de facteur Rhésus négatif soit du groupe O.

Exercice 2. Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été faite dans des familles ayant 2 enfants de moins de 10 ans : une fille et un garçon. On a constaté que 20 des filles et 50 des garçons sont touchés par la maladie. Par ailleurs, dans les familles, sachant que la fille est touchée par la maladie, le garçon l'est aussi dans 70 des cas.

On choisit par hasard une famille ayant fait l'objet de cette étude. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A =: " Les deux enfants sont atteints par la maladie ".
2. B =: " Au moins un des deux enfants est atteint ".
3. C =: " Aucun des enfants n'est atteint ".
4. D =: " Sachant que le garçon est atteint, la fille l'est aussi ".
5. E =: " Sachant que le garçon n'est pas atteint, la fille l'est ".

Exercice 3. Mr A et Mme B présentent tous les deux des symptômes qui ne peuvent être provoqués que par l'une ou l'autre de deux maladies M1 et M2 qui se soignent de façon fort différentes (et que l'on suppose incompatible). La maladie M2 étant statistiquement 99 fois plus fréquente que la maladie M1, leurs médecins présument être en présence de M2. Pour confirmer leurs diagnostics, ils prescrivent une analyse. De son principe même, cette analyse ne peut donner de certitude : son résultat est positif chez 74,25%, des malades atteints de la maladie M1 et seulement chez 0.75% des malades atteints de M2 (et ne pas 100% et 0%). Les résultats sont négatifs pour Mr A et positifs pour Mme B. Faut-il en conclure que Mr A est atteint de M2 et Mme B de M1?

Exercice 4. Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si un sujet est malade (événement M), alors le test est positif (événement P) avec probabilité α, si un sujet est sain (événement S), alors le test est positif avec probabilité β. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur τ^{-1} personnes.

1. Calculer la probabilité pour que le sujet soit sain alors que son test est positif.
2. Notons par N l'événement "le test est négatif". Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif.

Application numérique : $\alpha = 0.98$, $\beta = 0.03$ et $\tau^{-1} = 1000$.

Exercice 5. Une urne contient deux vertes et trois rouges indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   (a) Calculer la loi de probabilité de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement A :=" les deux boules tirées sont de même couleur".
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la régle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   B =: "seule la première boule tirée est verte",
   C =: "une seule des deux boules tirées est verte".
   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée?.

Exercice 6. Soient X une v.a.d. de domaine $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_k, ...\}$ et F une fonction numérique sur $\mathbb{R}$ (ou dont l'ensemble de définition contient au moins l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ de X). Supposons que $\mathbb{E}[F(X)]$ existe.

1. Pour chaque $i = 1, ..., k, ...,$ notons $B_i = \{x_k \,:\, F(x_k) = y_i\}$, avec $\{y_1, ..., y_k, ...\}$ est l'ensemble des valeurs de $F(X)$ sans répétition. Vérifier que
$$\{F(X) = y_i\} = \bigcup_{k\,:\,x_k \in B_i} \{X = x_k\}.$$
2. En déduire que
$$\mathbb{E}[F(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} F(x_k)\mathbb{P}(X = x_k).$$

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} K\dfrac{(x+\ln(x))}{x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq e \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer K.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si ces réels existent.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ \alpha & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Déterminer α.

b. Calculer la fonction de répartition F_X de X.

c. Calculer $P(X > \frac{1}{2})$ puis $E(X)$.

d. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$. Calculer $E(Y)$.

e. Donner la fonction de répartition F_Y de Y, en fonction de F_X.

Exercice 9. Soit la fonction de densité de probabilité, d'une variable aléatoire X, suivante :

$$f(x) = ax + bx^2 \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Déterminer a et b pour que X soit une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{2}{3}$.
2. Calculer l'écart type de X.