



**Exercice 1 :** Soit la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ .

1. Montrer que  $F$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $F$  satisfait l'équation différentielle  $2F'(x) + xF(x) = 0$  et en déduire la valeur de  $F$ .

**Exercice 2 :** On considère la fonction donnée par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Donner le domaine de définition  $D$  de  $F$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $D$ .
3. Calculer  $F$ .

**Exercice 3 :** Soit la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que  $G$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $G$  est de classe  $C^1$ .

3. Justifier et calculer  $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$

4. En déduire la valeur de  $G$ .

**Exercice 4 :** On considère la fonction réelle de la variable réelle :  $x \mapsto F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)} dt$ .

On pose  $f(t, x) = \frac{t-1}{t^{x-1} \ln(t)}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]1, +\infty[$ .

1. Trouver un équivalent de  $f$  au voisinage de 1 et au voisinage de  $+\infty$ .
2. Montrer que le domaine de définition de  $F$  est  $D = ]3, +\infty[$ .
3. Soit  $a > 3$ . Démontrer que  $F$  est continue sur  $[a, +\infty[$ . En déduire que  $F$  est continue sur  $D$ .
4. Démontrer que  $F$  est de  $C^1$  sur  $D$ .
5. Pour  $x \in D$ , donner l'expression de  $F'$ . Déduire que pour tout  $x \in D$

$$F(x) = \ln(x-2) - \ln(x-3) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$



**Exercice 5 :** On considère la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction  $\Gamma$  est  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . En déduire que pour tout entier  $n$  non nul,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .
3. Montrer que pour tout réel  $t$  strictement positif fixé, l'application  $g_t : x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow t^{x-1}$  est convexe. En déduire que l'application  $\Gamma$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Montrer que  $\Gamma$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En déduire que  $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ .
5. Montrer que  $\Gamma$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 6 :** On considère la fonction  $F$  définie par:  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ .

1. Montrer que le domaine de définition de  $F$  est  $[0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .
4. Montrer que  $F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt$ , pour tout  $x > 0$ .
5. Prouver que  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \frac{x}{x^2+4}$  pour tout  $x > 0$ .
6. Vérifier que  $|F'(x)| \leq \frac{1}{x}$ , pour tout  $x > 0$ . En déduire que  $F'(x) = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \ln(x^2+4)$ , pour tout  $x > 0$ .
7. A l'aide d'une intégration par parties, déduire que  $F(x) = \frac{1}{4} x \ln(\frac{x^2}{x^2+4}) - \arctan(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2}$ .
8. En déduire la valeur de  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ .
9. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .