Exercice 1 : Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que la fonction f est holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est constante.
2. $Re(f)$ est constante.
3. $Im(f)$ est constante.

En déduire que la fonction f définie par $f(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Exercice 2 :

1. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma \overline{z}dz$, où Γ est le chemin joignant le point $(1,1)$ au point $(2,4)$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma (z^2 + 3z)dz$, où Γ est définie par $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ du point $(2,0)$ au point $(0,2)$.
3. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 3 : Déterminer la nature des singularités isolées des fonctions suivantes et préciser la valeur des résidus :

$$a)\quad \frac{1-\cos(z)}{z^2} \qquad b)\quad \tan(z) \quad c)\quad \frac{z^3+1}{z(z-i)^3} \qquad d)\quad \exp(\tfrac{1}{z^2}).$$

Exercice 4 : Soient les fonction f et g définies par :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

1. Déterminer les développements de f et g en série de Laurent dans les trois cas suivant :
   (a) $0 < |z| < 1$,
   (b) $1 < |z| < 2$,
   (c) $|z| > 2$.
2. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$, où γ est le cercle de centre $\frac{-3}{2}$ et de rayon 1.

Exercice 5 : Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.

   Soit f la fonction complexe définie par $\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R,-r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r,R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon $R>0$.

2. Etudier les singularités de f et donner les résidus correspondants puis calculer $\displaystyle\int_{\gamma^+} f(z)dz$ suivant les valeurs de R.

3. (a) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin(x) \geq \dfrac{2x}{\pi}$ et que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}d\theta \leq \frac{\pi}{R}$.

   (b) Pour $R>1$, montrer que $\displaystyle|\int_{C_{R^+}} f(z)dz| \leq \frac{\pi}{R(R^2-1)}$.

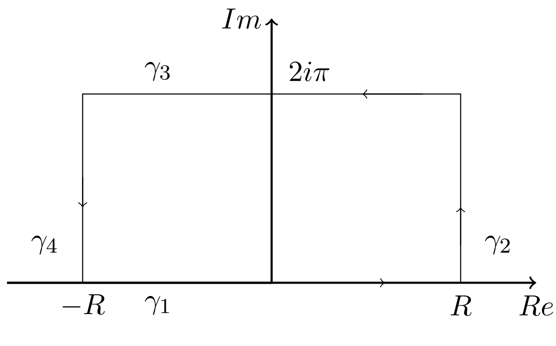
4. Donner $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_{r^-}} f(z)dz$.

5. En déduire la valeur de I.

Exercice 6 : Soit la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$, $\quad 0<\lambda<1$.

1. Montrer que $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

   Dans la suite, on Considère la fonction complexe définie par $f(z)=\dfrac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$ et $\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ le contour fermé suivant :



2. Quels sont les pôles de f. En utilisant un développement de e^z au voisinage de $i\pi$, donner le résidu de f au point $z_0=i\pi$.

3. Montrer que $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq 2\pi\frac{e^{\lambda R}}{e^R-1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz$.

4. Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0$.

5. Déduire que $I = \dfrac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Exercice 7 : Soit la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

1. Etablir la convergence de $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

   On Considère la fonction complexe $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{\sqrt{z}(1+z^2)^2}$, où

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\,arg(z)}{2}}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq arg(z) = \theta < 2\pi.$$

   Soient R et r deux réels tels que $0 < r < 1 < R$. On considère γ^+ le contour formé par le segment $[-R,-r]$, le demi-cercle supérieur C_{r^-} de centre 0 et de rayon r, le segment $[r,R]$ et le demi-cercle supérieur C_{R^+} de centre 0 et de rayon R.

2. En utilisant un développement en série de Taylor, étudier la singularité de f au point $z_0 = i$ et donner le résidu correspondant puis calculer $\int_{\gamma^+} f(z)dz$.

3. Montrer que $\left| \int_{C_{R^+}} f(z)dz \right| \leq \pi\sqrt{R}\dfrac{(\ln(R)+\pi)}{(R^2-1)^2}$. En déduire $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_{R^+}} f(z)dz$.

4. Trouver une majoration de $\int_{C_{r^-}} f(z)dz$. En déduire $\lim_{r\to 0} \int_{C_{r^-}} f(z)dz$.

5. Calculer les valeurs de I et $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}$.

Exercice 8 : Par la méthode des résidus calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2+\sin(\theta)} d\theta.$$