

Exercice 1 : Calculer les deux intégrales doubles suivantes:

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} dx dy, \quad J = \iint_{\Delta} (x^2+y^2) dx dy,$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 2 : On note par $\Delta = [0, 1] \times [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n = \iint_{\Delta} \frac{(xy)^n}{1+xy} dx dy.$$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. En déduire une expression de $I = \iint_{\Delta} \frac{1}{1+xy} dx dy$, comme somme d'une série numérique.

3. Soit f la fonction 2π -périodique telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = x^2$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a : $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$. En Déduire la valeur de I .

Exercice 3 : En calculant de deux façons

$$\iint_{[0,1]^2} x^y dx dy$$

déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt.$$

Exercice 4 : Soit a un réel strictement positif, on définit les deux ensembles suivants :

$$K_a = [0, a] \times [0, a], \quad D_a = \left\{ (x, y) \in ([0, +\infty[)^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale de Gauss suivante : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

1. Montrer que : $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Calculer $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

2. En remarquant que $D_a \subset K_a \subset D_{a\sqrt{2}}$, calculer I .



Exercice 5 :

1. Calculer $A = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)((1+y^2))}$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

2. Démontrer la convergence des intégrales

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \cos^2(\theta))}{2 \cos(2\theta)} d\theta, \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \sin^2(\theta))}{2 \cos(2\theta)} d\theta, \quad D = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt.$$

3. Montrer que $A = B$ et calculer $B + C$ et $B - C$ en fonction de D . En déduire les valeurs de C et D .

Exercice 6 : Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_D \frac{xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dx dy,$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 7 : Soit D le domaine de \mathbb{R}^2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}.$$

1. Tracer D et prouver que c'est une partie compacte quarrable de \mathbb{R}^2 .

2. Calculer $J = \iint_D dx dy$.

3. Calculer $I = \iint_D \frac{dx dy}{(|x| + |y|)^2 + 4}$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \iint_D (yx^2 + y^3) dx dy$, avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}$.

2. $J = \iint_D \frac{dx dy}{2 + e^{-x^2 - 4y^2}}$, avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.

3. $K = \iint_D (x+y)^2 dx dy$, avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0\}$.

Exercice 9 : Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 tel que

$$D = \{(x, y) \in (]0, +\infty[)^2 \mid x \leq y \leq 2x \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}.$$



1. Tracer D .
2. Montrer que le changement de variable $\phi : (u, v) \in \Delta \mapsto (x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}) \in D$ où Δ est un domaine à déterminer, est un C^1 -difféomorphisme.
3. Calculer l'aire de D .

Exercice 10 : Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

1. Soit D le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$. Montrer que $I = \iint_D \frac{x dx dy}{(1+x^2)(1+xy)}$.

2. En intervertissant les rôles de x et y , montrer que

$$2I = \iint_D \frac{(x+y) dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

3. Dédurre la valeur de I .

Exercice 11 :

1. Calculer le volume d'une sphère de \mathbb{R}^3 de centre 0 et de rayon R .
2. Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D \cos(x) dx dy dz, \quad J = \iiint_{\Delta} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz,$$

où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 < z < a\}$.

Exercice 12 : Calculer les deux intégrales triples suivantes:

$$I = \iiint_D (x+y)z dx dy dz, \quad J = \iiint_D \cos(x+y+2z+1) dx dy dz,$$

où $D = \{(x, y, z) \in ([0, +\infty[)^3 \mid x+y+2z \leq 2\}$.