

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
CAMPUS DE CATALÃO

MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO PARA EQUAÇÕES
ALGÉBRICAS NÃO-LINEARES

ROMES ANTONIO BORGES

Orientador:

Prof. Dr. Donald Mark Santee

Monografia de Especialização apresentada ao
Curso de Especialização em Matemática da
UFG-Campus de Catalão para a obtenção do
título de Especialista em Matemática

Área de concentração:

Análise

Catalão

2000

MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO PARA EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NÃO-LINEARES

Romes Antonio Borges

Monografia aprovada e defendida em 26 de fevereiro de 2000, pela Banca Examinadora constituída pelos professores

Prof. Dr. Donald Mark Santee, D. Sc. (UFG/Catalão)
(ORIENTADOR)

Prof. Ms. Cleves Mesquita Vaz, Ms. (UFG/Catalão)
(EXAMINADOR INTERNO)

Prof. Ms. Plínio José Oliveira, Ms. (UFG/Catalão)
(EXAMINADOR INTERNO)

Prof^a. Ms. Élide Alves da Silva, Ms. (UFG/Catalão)
(SUPLENTE)

AGRADECIMENTOS:

Agradeço primeiramente a Deus que me acompanhou nesta jornada e me possibilitou este momento.

Não poderia de forma alguma esquecer de pessoas como Clélia, Mércia e minha esposa Kely que muito me apoiaram para a conclusão desse trabalho.

Romes Antonio Borges

SUMÁRIO

Introdução 1

Cap.1 Iteração e expansão 2

Método Iterativo 3

Método da expansão 4

Cap.2 Perturbações Singulares e mudança de escala 5

Soluções Singulares no Método Iterativo 5

Soluções Singulares no Método da Expansão 6

Mudança de escala no Método da Expansão 7

Cap.3 Potência não Inteira 8

Com Descobrir a seqüência da expansão 10

Método Iterativo 11

Cap.4 Expansões Logarítmicas 11

Cap.5 Ponderação sobre a Convergência das Expansões 14

Cap.6 Métodos de Perturbação em Problemas de autovalores 14

Perturbações de Segunda Ordem 16

O Caso de Raízes Múltiplas 16

O Caso de Raízes Degeneradas 17

Bibliografia 19

RESUMO

Este trabalho trás uma introdução simples e prática sobre os diversos métodos de perturbação. Apesar de simples, é um conteúdo importantíssimo para se iniciar um estudo mais aprofundado no que diz respeito a esses métodos.

Começamos com uma ligeira introdução que descreve os métodos iterativos e da expansão, posteriormente é explicado como trabalhar os métodos de perturbação em casos singulares e mudança de escala nos métodos mencionados acima. O assunto a seguir trata os casos de potências não inteiras e como se descobrir a seqüência de expansão, os métodos mencionados até aqui são adaptados também para o uso em Funções logarítmicas, e problemas de autovalores.

INTRODUÇÃO

A busca de soluções precisamente aproximadas de equações forma um ramo da matemática aplicada bastante distinta da matemática pura, da física e da engenharia. A expressão “precisamente aproximada” não é uma contradição. Apenas significa que a aproximação possui um erro conhecido e controlável. Controlável no sentido de que esse erro pode ser reduzido por algum procedimento conhecido.

Existem basicamente duas maneiras de se obter soluções precisamente aproximadas de uma equação: Métodos numéricos e Métodos analíticos. Essa monografia dedica-se ao segundo.

A aproximação analítica é obtida quando algum parâmetro do problema é pequeno, daí vem o nome “Métodos de Perturbação”. Métodos de perturbação e métodos numéricos, não competem entre si, ao contrário, completam-se.

Além de obter bons valores numéricos para a solução da equação esse não é o único objetivo de um método de perturbação. Espera-se normalmente que a análise revele alguma propriedade ou ponto de vista interessante sobre o fenômeno físico que está sendo modelado.

Determinar uma aproximação por métodos de perturbação, entretanto não é uma tarefa simples e direta. Durante um trabalho de pesquisa é útil que o pesquisador esteja aberto a sugestões vindas de interpretações físicas. Não existe um método de perturbação único que resolve todos os problemas, ou mesmo uma classe de problemas. Por isso é necessário que se saiba explorar a hipótese de pequenez do parâmetro através de diversos métodos.

Essa monografia trata se especificamente dos vários métodos de perturbação existentes para tratar do problema de determinar raízes aproximadas de equações algébricas não-lineares, e das dificuldades que possam surgir no emprego desses métodos.

O capítulo 1 descreve os dois métodos básicos, que são: O Método da expansão e o Método Iterativo. O capítulo 2 trata-se de raízes que tendem ao infinito. O capítulo 3 e 4 mostra como adaptar os métodos para o caso de expansões em potências não inteiras e logaritmos respectivamente. O capítulo 5 trata-se da verificação da convergência da solução aproximada. O capítulo 6 aplica um método de perturbação a um problema de autovalor em sistemas não lineares.

CAPÍTULO 1 - ITERAÇÃO E EXPANSÃO

Partiremos de uma equação na variável x contendo o parâmetro ϵ .

$$x^2 + \epsilon x - 1 = 0$$

essa equação possui soluções:

$$x = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2} \rightarrow x = -\frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4}{4}} \rightarrow x = \frac{-1}{2}\epsilon \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2}$$

para ϵ pequeno, podemos expandir esta solução na série de potências:

$$x = \begin{cases} +1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{128}\epsilon^4 + O(\epsilon^6) \\ -1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{128}\epsilon^4 + O(\epsilon^6) \end{cases}$$

Esta expansão é convergente quando $|\epsilon| < 2$.

Mais importante que a convergência é o fato de que as séries truncadas são uma boa aproximação quando ϵ é pequeno. O exemplo abaixo mostra que os primeiros termos da série ficam a 3% da solução exata.

$ \epsilon <$	$0,05$	$0,5$	$1,2$	$1,6$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x	$=$	$1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{128}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)$		

O último valor de (1,6) não está muito longe do limite da convergência.

De outro modo, se fixarmos o valor de $\epsilon = 0,1$, os primeiros termos são:

$$\begin{aligned} x &\sim 1,0 \\ &0,95 \\ &0,95125 \\ &0,95124921 \\ &0,95124922\dots \text{ (solução exata).} \end{aligned}$$

Com freqüência o esforço computacional envolvido nesses pequenos somatórios é muito menor que o esforço computacional para a obtenção da solução exata.

Nesse exemplo iniciamos com a solução exata e depois expandimos essa solução numa série de potências. Contudo, na maioria dos problemas não é possível obter-se a solução exata. Estamos interessados, portanto, em desenvolver métodos que determinam a expressão aproximada diretamente.

Existem dois métodos básicos para a determinação das aproximações: O método iterativo e o método da expansão.

Iremos agora estudar os dois métodos apontando vantagens e desvantagens de cada um.

O MÉTODO ITERATIVO

O primeiro passo do método iterativo é a reorganização da equação original transformando-o em uma função de iteração. Essa função será a base do processo.

Este primeiro passo envolve uma certa quantidade de inspiração que consequentemente é apontado como o maior defeito do método.

Uma reorganização conveniente da equação anterior é: $x = \pm \sqrt{1 - \epsilon x}$

Qualquer solução para a equação original é solução desta equação reorganizada e vice-versa.

Vamos adotar o processo iterativo nos preocupando apenas com a raiz positiva.

$x_{n+1} = \sqrt{1 - \epsilon x_n}$ Para iniciar o
 processo iterativo é necessário primeiramente um ponto inicial que é o valor da raiz quando $\epsilon = 0$, $x_0 = 1$.

Fazendo a primeira iteração temos: $x_1 = \sqrt{1 - \epsilon}$, a expansão em série de Taylor em torno de $x_0 = 1$ é:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3 + \dots$$

Observando a solução exata, vemos que ϵ^2 e os termos mais altos estão errados. Consequentemente truncaremos a série dada por x_1 , depois do 2º termo:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \dots$$

Prosseguindo, para uma próxima iteração temos:

$$x_2 = \sqrt{1 - \epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)}$$

que podem ser expandidos dessa vez restando apenas os termos até ϵ^2 .

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{1}{2}\epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) - \frac{1}{8}\epsilon^2 (1 + \dots)^2 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Notamos agora que o termo de ϵ^2 está agora correto depois de 2 iterações.

Iterando novamente:

$$x_3 = \sqrt{1 - \epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2\right)}$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2\right) - \frac{1}{8}\epsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \dots\right)^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3 \left(1 - \dots\right)^3 + \dots$$

$$x_3 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2 + O\epsilon^3 + \dots$$

Podemos observar que para se obter os termos de ordem mais alta pelo método iterativo se requer um pouco mais de esforço. O método tem também a característica indesejável que nas primeiras iterações aparecem valores errados para os termos de ordem mais alta. Pode-se apenas verificar se um termo está correto fazendo-se mais uma iteração, o que é convincente mas não é uma prova rigorosa.

O MÉTODO DA EXPANSÃO

O primeiro passo para o método da expansão é fixar $\epsilon = 0$ e encontrar raízes não perturbadas $x = \pm 1$, então faz-se uma expansão de uma dessas raízes. Por exemplo: $x = +1$, a partir daí se supõe que a solução pode ser expressa pela expansão:

$$x(\epsilon) = 1 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \dots$$

onde x_1, x_2 etc. são coeficientes a serem determinados.

Esta expansão é substituída dentro da equação original:

$$\begin{aligned} & 1 + \epsilon 2x_1 + \epsilon^2 (x_1^2 + 2x_2) + \epsilon^3 (2x_1x_2 + 2x_3) + \dots \\ & + \epsilon + \epsilon^2 x_1 + \epsilon^3 x_2 + \dots \\ & - 1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Aqui se ignora a dificuldade Potências de se fazer a substituição e as limitações de multiplicar as séries termo a termo. Os coeficientes das potências de ϵ dos dois lados da equação são agora comparadas de onde se obtém $\epsilon^0: 1 - 1 = 0$. Este nível é satisfeito automaticamente por que começamos a expansão a partir do valor correto $x = 1$.

$$\text{Para } \epsilon^1: 2x_1 + 1 = 0 \quad \text{que leva a : } x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Para } \epsilon^2: x_1^2 + 2x_2 + x_1 = 0 \quad \text{que leva a : } x_2 = \frac{1}{8}$$

O valor de x_1 determinado no passo anterior foi usado

$$\text{Para } \epsilon^3: 2x_1x_2 + 2x_3 + x_2 = 0 \text{ isto é: } x_3 = 0.$$

Novamente foram usados os valores de x_1 e x_2 determinados nos casos anteriores.

O método da expansão é muito mais fácil que o método iterativo quando se trabalha com ordens mais altas. Para usar o método da expansão, contudo é necessário supor que a

solução pode ser expandida em potência de ϵ , e as substituições e manipulações algébricas são permitidas.

CAPÍTULO 2 - PERTURBAÇÕES SINGULARES E MUDANÇA DE ESCALA

Estudaremos nesta seção a equação quadrática:

$$\epsilon x^2 + x - 1 = 0$$

Se $\epsilon = 0$, teremos uma raiz $x = 1$, quando $\epsilon \neq 0$ teremos duas raízes. Este é exemplo de um problema de perturbação singular, em que a solução com $\epsilon = 0$ é diferente da solução com $\epsilon \rightarrow 0$.

Problemas interessantes são freqüentemente singulares. Quando não são singulares dizemos que são regulares.

Para analisarmos o comportamento da 2.^a raiz, nós pegamos as soluções exatas para a equação quadrática e expandimos para ϵ pequeno (que converge para $|\epsilon| < \frac{1}{4}$).

As duas raízes são:

$$x = \begin{cases} 1 - \epsilon + 2\epsilon^2 - 5\epsilon^3 + \dots \\ -\frac{1}{\epsilon} - 1 + \epsilon - 2\epsilon^2 + 5\epsilon^3 + \dots \end{cases}$$

desta forma a segunda raiz singular tende para $x = -\infty$ dentro do limite $\epsilon = 0$.

Soluções singulares no Método Iterativo

Para desenvolver a função de iteração que leva à solução singular raciocinou-se da seguinte forma:

Vamos conservar a 2.^a solução que governa a equação quadrática. É necessário que o termo ϵx^2 seja mantido como termo principal ao invés de uma pequena correção

No entanto x será necessariamente grande. Então se induzirmos a ordem de -1 termo na equação e negligenciando-o quando comparado com o term x , isto é:

$$\epsilon x^2 + x \sim 0 \text{ que possui solução } x \sim -\frac{1}{\epsilon}$$

Portanto eles são induzidos reorganizando a equação quadrática:

$$x = -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon x}$$

e o processo iterativo:

$$x_{n+1} = -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon x_n}$$

começando pelo ponto $X_0 = -\frac{1}{\epsilon}$.

Iterando encontramos:

$$x_1 = -\epsilon^{-1} - 1$$

e iterando novamente:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\epsilon^{-1} - \frac{1}{1+\epsilon} \\ &= -\epsilon^{-1} - 1 + \epsilon + \dots \end{aligned}$$

precisamos obter posteriormente o termo ϵ^2 .

Soluções Singulares no Método da Expansão

O método da expansão pode ser também aplicado para raízes singulares, fazendo a série de potências iniciar no termo ϵ^{-1} . A maneira de se determinar o primeiro termo dessa série, será vista a seguir.

Substituindo:

$$x(\epsilon) = \epsilon^{-1} x_{-1} + x_0 + \epsilon x_1 + \dots$$

Temos:

$$\epsilon^{-1} x_{-1}^2 + 2x_{-1}x_0 + \epsilon (2x_{-1}x_1 + x_0^2) + \dots$$

$$\epsilon^{-1} x_{-1} + x_0 + \epsilon x_1 + \dots$$

$$- 1$$

$$= 0$$

Comparando os coeficientes de ϵ^n , temos:

$$\text{Em } \epsilon^{-1}: \quad x_{-1}^2 + x_{-1} = 0 \quad \text{isto é} \quad x_{-1} = -1 \text{ ou } 0.$$

Ignoraremos a raiz $x_{-1}=0$, pois é uma raiz regular.

$$\text{Em } \epsilon^0: \quad 2x_{-1}x_0 + x_0 - 1 = 0, \quad \text{isto é } x_0 = -1$$

$$\text{Em } \epsilon^1: \quad 2x_{-1}x_1 + x_0^2 + x_1 = 0 \quad \text{isto é } x_1 = 1$$

Onde em cada etapa os valores x_n previamente determinados foram usados.

MUDANÇA DE ESCALA NO MÉTODO DA EXPANSÃO

Em vez de começarmos a expansão com o termo incomum ϵ^{-1} , uma idéia muito útil para problemas é a mudança de escala das variáveis antes de fazermos a expansão.

Então fazendo a seguinte mudança de escala

$$x = \frac{X}{\epsilon}$$

Na equação originalmente singular em x produz a seguinte equação em

$$X^2 - X - \epsilon = 0, \text{ o qual é regular.}$$

Então o problema de encontrar um ponto inicial correto para a expansão pode ser visto como um problema de fazer convenientemente uma mudança de escala que regulariza como um problema regular.

Existe um procedimento simples para encontrar toda as mudanças de escala úteis. O primeiro passo é uma mudança de escala geral com fator de escala δ (ϵ).

$$x = \delta X$$

Com X de ordem estritamente unitário com $\epsilon \rightarrow 0$. Infelizmente a notação $X = O(1)$ não descreve bem essa faz limitação sobre X , por causa de $O(1)$; X pode desaparecer quando $\epsilon \rightarrow 0$, então somos forçados a adotar a notação $X = \text{ord}(1)$, para dizer que X é da ordem de 1 unidade quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Fazendo a mudança de escala na equação quadrática, temos:

$$\epsilon \delta^2 X^2 + \delta X - 1 = 0$$

Agora analisaremos o equilíbrio dominante desta equação para δ de diferentes magnitudes. Começaremos procurando uma mudança de escala com δ muito pequeno progredindo para δ muito grande.

- $\delta \ll 1$, se δ é muito pequeno, o lado esquerdo desta equação é $\epsilon \delta^2 X^2 + \delta X - 1 = \text{pequeno} + \text{pequeno} - 1$.

Esta não se pode valer o zero no lado esquerdo, desse modo δ pequeno é uma mudança de escala **inaceitável**.

À medida que δ é aumentado, o termo X que primeiro quebra o domínio do termo 1 e isto ocorre quando $\delta = 1$; portanto a extensão da mudança de escala δ inaceitável é $\delta \ll 1$ como declarado acima.

- $\delta = 1$, o lado esquerdo da equação é agora: $\epsilon \delta^2 X^2 + \delta X - 1 = \text{Pequeno} + X - 1$.

Então se pode balancear o **zero** do lado direito, o que nos dá a raiz regular $X = -1 + \text{pequeno}$.

- $1 \ll \delta \ll \epsilon^{-1}$ se δ é um pouco maior que 1, então o termo x domina o lado esquerdo da equação

$$(\epsilon \delta^2 X^2 + \delta X - 1)/\delta = \text{peq.} + X + \text{peq.}$$

Isso só pode igualar a zero sobre δ se $X = 0 + \text{peq.}$ o que viola a restrição de que X é estritamente de ordem 1. Essa mudança de escala portanto não é aceitável.

- $\delta = \epsilon^{-1}$ O lado esquerdo da equação dividido por $\epsilon \delta^2$ é:

$$(\epsilon \delta^{-2} X^2 + \delta X - 1) / \delta^{-2} = X^2 + X + \text{peq.}$$

Isso pode ser igual a zero dividido por δ^{-2} se $X = -1 + \text{peq.}$, o que leva à raiz regular, ou $X = 0 + \text{peq.}$ o que é aceitável.

- $\epsilon^{-1} \ll \delta$ finalmente quando δ é muito grande, o lado esquerdo dividido por $\epsilon \delta^{-2}$ é :

$(\epsilon \delta^{-2} X^2 + \delta X - 1) / \delta^{-2} = X^2 + \text{peq.} + \text{peq.}$ Isso só pode igualar a zero se $X = 1$, o que é uma mudança de escala inaceitável.

Exercício 1.2

Encontre as mudanças de escala e as raízes de $\epsilon^{-2} x^3 + x^2 + 2x + \epsilon = 0$.

Agora encontre 2 termos de aproximação das raízes.

CAPÍTULO 3 - POTÊNCIAS NÃO INTEIRAS

Nesta seção estudaremos a equação quadrática:

$$(1 - \epsilon)x^2 - 2x + 1 = 0$$

Começaremos agora com o método da expansão. Fixando $\epsilon = 0$ encontramos a solução não perturbada $x = 1$. Da maneira usual, fazendo a expansão em potência de ϵ temos:

$$x(\epsilon) = 1 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

Substituindo na equação original tem-se:

$$\begin{aligned} & 1 + \epsilon 2x_1 + \epsilon^2 (2x_2 + x_1^2) + \dots \\ & - \epsilon - \epsilon^2 2x_1 + \dots \\ & - 2 - \epsilon 2x_1 - \epsilon^2 2x_2 + \dots \\ & + 1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

e comparando os coeficientes de mesma ordem de ϵ teremos

$$\epsilon^0 : 1 - 2 + 1 = 0,$$

que é automaticamente satisfeita pois iniciamos a perturbação corretamente em torno de $x = 1$.

$$\text{Para } \epsilon^1 : 2x_1 - 1 - 2x_1 = 0$$

Esta equação não é satisfeita para nenhum valor de x_1 , exceto para $x_1 = \infty$.

Para encontrarmos a causa da dificuldade, observaremos a solução exata da equação que é:

$$x = \frac{1 \pm \epsilon^{\frac{3}{2}}}{1 - \epsilon}$$

Pegando a raiz positiva e expandindo para ϵ pequeno, temos que ela será expandida em potências de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$. Logo podemos fazer a expansão na potência não inteira $\frac{1}{2}$ que leva a:

$$x(\epsilon) = 1 + \epsilon^{\frac{1}{2}} x_{\frac{1}{2}} + \epsilon x_1 + \epsilon^{\frac{3}{2}} x_{\frac{3}{2}} + \dots$$

Substituindo esta expansão na equação original temos:

$$\begin{aligned} & 1 + \epsilon^{\frac{1}{2}} 2x_{\frac{1}{2}} + \epsilon (2x_1 + x_{\frac{1}{2}}^2) + \epsilon^{\frac{3}{2}} (2x_{\frac{3}{2}} + 2x_{\frac{1}{2}}x_1) + \dots \\ & - \epsilon - \epsilon^{\frac{3}{2}} 2x_{\frac{1}{2}} + \dots \\ & - 2 - \epsilon^{\frac{1}{2}} 2x_{\frac{1}{2}} - \epsilon 2x_1 - \epsilon^{\frac{3}{2}} 2x_{\frac{3}{2}} + \dots \\ & = 0 \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de $\epsilon^{\frac{n}{2}}$ temos: $\epsilon^0: 1 - 2 + 1 = 0$ que é

automaticamente satisfeito para: $\epsilon^{\frac{1}{2}}: 2x_{\frac{1}{2}} - 2x_{\frac{1}{2}} = 0$

Esta é satisfeita para qualquer valor de $x_{\frac{1}{2}}$. Note que $x_{\frac{1}{2}}$ **não é determinado** em $\epsilon^{\frac{1}{2}}$, mas prosseguindo temos em $\epsilon^1: 2x_1 + x_{\frac{1}{2}}^2 - 1 - 2x_1 = 0$ onde $x_{\frac{1}{2}} = \pm 1$ e x_1 é não determinado nesse nível.

Continuando neste caminho:

$$\text{para } \epsilon^{\frac{3}{2}}: 2x_{\frac{3}{2}} + 2x_{\frac{1}{2}}x_1 - 2x_{\frac{1}{2}} - 2x_{\frac{3}{2}} = 0$$

onde $x_1 = 1$, para as duas raízes de $x_{\frac{1}{2}}$. Enquanto $x_{\frac{3}{2}}$ é não determinado.

O atrazo na determinação de $x_{\frac{n}{2}}$ no nível maior $\epsilon^{\frac{n+1}{2}}$ ao invés de $\epsilon^{\frac{n}{2}}$ mostra que é requerido um pequeno trabalho extra. Existe também o perigo uma de que no nível seguinte não seja possível satisfazer a equação e a solução geral não ser válida, como acontece no nível ϵ da expansão em potências de ϵ errada.

COMO DESCOBRIR A SEQÜÊNCIA DA EXPANSÃO

No exemplo anterior o método da expansão foi corrigido a partir da observação da solução exata. Resta ainda o problema de como determinar uma de expansão quando a solução exata não é conhecida. Para resolver esse problema, a expansão será expressa da seguinte forma:

$$x(\epsilon) = 1 + \delta_1(\epsilon)x_1 + \delta_2(\epsilon)x_2 + \dots$$

Onde os δ_i são funções desconhecidas de ϵ e se exige

$$1 \gg \delta_1(\epsilon) \gg \delta_2(\epsilon) \gg \epsilon \quad x_1, x_2, \dots = \text{ord}(1) \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0$$

Substituindo na equação original temos:

$$\begin{aligned} & 1 + 2\delta_1 x_1 + \delta_1^2 x_1^2 + 2\delta_2 x_2 + 2\delta_1 \delta_2 x_1 x_2 + \delta_2^2 x_2^2 + \dots \\ & - \epsilon - 2\epsilon \delta_1 x_1 - \epsilon \delta_1^2 x_1^2 - 2\epsilon \delta_2 x_2 + \dots \\ & - 2 - 2\delta_1 x_1 - 2\delta_2 x_2 + \dots \\ & + 1 \\ & = 0 \end{aligned}$$

A ordem de grandeza relativa de alguns dos termos é clara, isto é, $2\delta_1 x_1 \gg \delta_1^2 x_1^2$ e $2\delta_1 x_1 \gg 2\delta_2 x_2$ pois $1 \gg \delta_1$ e $\delta_1 \gg \delta_2$ respectivamente. Entretanto existe uma considerável incerteza entre os termos $\delta_1^2 x_1^2$ e $2\delta_2 x_2$. Retirando os termos que se cancelam, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \delta_1^2 x_1^2 + 2\delta_1 \delta_2 x_1 x_2 + \delta_2^2 x_2^2 + \dots \\ & - \epsilon - 2\epsilon \delta_1 x_1 - \epsilon \delta_1^2 x_1^2 - 2\epsilon \delta_2 x_2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Usando $1 \gg \delta_1 \gg \delta_2$ podemos observar que o termo mais importante de cada uma das **duas** linhas é: $\delta_1^2 x_1^2 - \epsilon$.

Portanto existem três possibilidades de balanceamento:

$$\text{ou } \delta_1^2 x_1^2 = 0 \text{ se } \delta_1^2 \gg \epsilon$$

$$\text{ou } \delta_1^2 x_1^2 - \epsilon = 0 \text{ se } \delta_1^2 = \epsilon$$

$$\text{ou } -\epsilon = 0 \text{ se } \delta_1^2 \ll \epsilon$$

Claramente a última opção é inaceitável, assim como a primeira, uma vez que nós queremos $x_1 = \text{ord}(1)$.

Daí concluímos que:

$$\delta_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}} \text{ e } x_1 = \pm 1$$

Removendo esses dois termos lalanceados, os termos mais importantes passam a ser: $2\delta_1\delta_2x_1x_2$ e $2\epsilon\delta_1x_1$. Repetindo novamente o raciocínio:

$$\text{ou } 2\epsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2x_1x_2 = 0 \text{ se } \delta_2 \gg \epsilon$$

$$\text{ou } 2\epsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2x_1x_2 - 2\epsilon^{\frac{3}{2}}x_1 = 0 \text{ se } \delta_2 = \epsilon$$

$$\text{ou } -2\epsilon^{\frac{3}{2}}x_1 = 0 \text{ se } \delta_2 \ll \epsilon$$

A única opção aceitável é $\delta_2 = \epsilon$ e $x_2 = 1$ (para ambas as raízes x_I).

Pelo que foi visto acima a determinação da seqüência de expansão envolve alguns detalhes intermediários desajeitados, na prática pode-se fazer duas etapas para a determinação de δ_1 e δ_2 respectivamente, da seguinte forma:

Primeiramente substitui-se $x = 1 + \delta_1x_1$ e se chega a $\delta_1 = \epsilon^{\frac{1}{2}}$. Depois, substitui-se $x = 1 + \epsilon^{\frac{1}{2}}x_1 + \delta_2x_2$ e se chega a $\delta_2 = \epsilon$. Partindo do problema em estágios: um considera-se em cada estágio o menor termo com ordem de grandeza indeterminada.

MÉTODO ITERATIVO

A superioridade do método iterativo pode ser notada nos casos onde a potência da expansão é desconhecida. Um arranjo conveniente da equação original é:

$$(x - 1)^2 = \epsilon x^2$$

A qual nos leva ao processo iterativo

$$x_{n+1} = 1 \pm \epsilon^{\frac{1}{2}} x_n$$

Começando com $x_0 = 1$ a raiz positiva é:

$$x_1 = 1 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad x_2 = 1 + \epsilon^{\frac{1}{2}} + \epsilon \quad \text{esse método é mais rápido, e mais direto.}$$

CAPÍTULO 4 EXPANSÕES LOGARÍTMICAS

Vamos encontrar a solução em $\epsilon \rightarrow 0$ (para valores positivos) na equação

$$x\epsilon^{-x} = \epsilon$$

Uma das raízes é próxima de $x = \epsilon$, o qual é facilmente obtido. A outra raiz torna-se **grande** à medida que $\epsilon \rightarrow 0$ e teremos um pouco mais de dificuldade em encontrá-la.

Concentraremos nosso esforço na raiz maior. Como a expansão dessa raiz é desconhecida, empregaremos o método iterativo.

Observemos primeiro que para ϵ pequeno ($\epsilon < \frac{1}{4}$ é suficiente) a raiz deve estar entre $x = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ (para o qual $xe^{-x} = \epsilon \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) > \epsilon$) e $x = 2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ (para o qual $xe^{-x} = \epsilon^2 2 \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < \epsilon$).

Nessa faixa de valores de x , o fator x apenas duplica enquanto que o fator e^{-x} diminui em uma ordem de grandeza de ϵ para o qual ϵ^2 . Logo podemos ver o fator x como que variando lentamente e concentrar na variação rápida do fator e^{-x} . Isso sugere a seguinte reorganização da equação original:

$$e^{-x} = \frac{\epsilon}{x}$$

Levando ao esquema iterativo:

$$x_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \ln x_n$$

Além disso, para as observações acima é claro que a raiz deve estar perto de $\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ quando ϵ é pequeno.

Logo começaremos a iteração partindo de $x_0 = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

Então:

$$x_1 = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \ln \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = L_1 + L_2$$

onde temos introduzida a notação taquigráfica:

$$L_1 = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \text{ e } L_2 = \ln \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

iterando novamente:

$$\begin{aligned} x_2 &= L_1 + \ln\left[L_1 \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)\right] \\ &= L_1 + L_2 + \frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2^2}{2L_1^2} + \dots \end{aligned}$$

e novamente:

$$\begin{aligned}
x_3 &= L_1 + \ln \left[L_1 \left(1 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2^2}{2L_1^2} \right) \right] = \\
&= L_1 + L_2 + \left(\frac{L_2}{L_1} - \frac{L_2}{2L_1} - \frac{L_2^2}{2L_1^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{L_2}{L_1} + \frac{L_2}{L_1} + \dots \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{L_2}{L_1} + \dots \right)^3 + \dots \\
&= L_1 + L_2 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{-\frac{1}{2}L_2^2 + L_2}{L_1^2} + \frac{\frac{1}{3}L_2^3 - \frac{3}{2}L_2^2 + L_2^2}{L_1^3} + \dots
\end{aligned}$$

A expansão necessária para ser usada no Método da Expansão é claramente mais difícil de adivinhar.

Além disso, o método iterativo produz mais de um termo a cada iteração.

A presença do $\ln \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$ significa que são necessários valores de ϵ muito pequenos para alcançar uma boa precisão numérica nas expressões aproximadas. Em situações normais, espera-se uma precisão razoável para $\epsilon < 0,5$ ou, na pior das hipóteses, para $\epsilon < 0,1$. Entretanto, para $\ln \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) > 3$ necessita-se de $\epsilon < 10^{-9}$.

O quadro mostra a porcentagem de erros em vários ϵ com os primeiros cinco termos da aproximação da raiz grande ou equação transcendental.

ϵ	L_1	$+L_2$	$+L_2/L_1$	$-\frac{1}{2}L_2^2/L_1^2$	$+L_2/L_1^2$
10^{-1}	36	12	2	4	0,03
10^{-3}	24	3	0,02	0,04	0,04
10^{-5}	19	1	0,04	0,1	0,001

O quadro mostra que uma exatidão aceitável é alcançada apenas com muitos termos por aproximação, ou valores de ϵ extremamente pequenos. O quadro também mostra uma outra característica comum da expansão, envolvendo $\ln \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$. Que é imprudente partir $(-\frac{1}{2}L_2^2/L_1^2)/L_1^2$ em dois termos, pois o erro é piorado na primeira parte antes que ele seja diminuído com a adição da segunda parte pelo menos para valores de ϵ não astronômicamente pequenos.

CAPÍTULO 5 PONDERAÇÃO SOBRE CONVERGÊNCIA DAS EXPANSÕES

O método da expansão nos dá pouca oportunidade de provar que uma aproximação converge.

Em problemas diretos a forma do n -ésimo termo é conhecido, e pode-se verificar se a expansão é consistente. Em alguns problemas muito particulares pode-se exprimir a forma geral do n -ésimo termo e achar um limite superior para esse termo e, portanto, provar a convergência da expansão. Entretanto, no caso geral não é possível obter-se a forma geral do n -ésimo termo, portanto não é possível provar a convergência.

O método iterativo nos dá uma simples prova de convergência. Suponha que $x = x_*$ seja raiz da equação $x = f(x)$ onde f é usado no processo iterativo $x_{n+1} = f(x_n)$. Uma das iterações levará $x = x_* + \delta$ para $f(x_* + \delta) = x_* + \delta f'(x_*) + O(\delta)$ se δ for pequeno. Uma iteração diminuirá o erro se $|f'(x_*)| < 1$.

Logo, pelo teorema da contração, o processo iterativo converge para a raiz x_* se $|f'(x_*)| < 1$ e se a iteração é iniciada perto da raiz.

Das seções anteriores, são sistemas iterativos que convergem:

$$\text{Em §1.1 } f = \sqrt{1-\epsilon} x \quad \text{com } x_* \sim 1 \quad \text{assim } f'(x_*) \sim -\frac{1}{2}\epsilon$$

$$\text{Em §1.2 } f = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon x} \quad \text{com } x_* \sim -1 \quad \text{assim } f'(x_*) \sim -\epsilon$$

$$\text{Em §1.3 } f = 1 + \frac{1}{\epsilon^2} x \quad \text{com } x_* \sim 1 \quad \text{assim } f'(x_*) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\text{Em §1.4 } f = \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \ln(x) \quad \text{com } x_* \sim \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad \text{assim } f'(x_*) \sim 1/\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

O sinal negativo de f nos dois primeiros casos significa que o erro troca de sinal, e que duas iterações sucessivas cercam a solução. Também, a partir da ordem de grandeza de f pode-se determinar quantos termos estarão corretos depois de um certo número de iterações.

CAPÍTULO 6 MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO EM PROBLEMAS DE AUTOVALORES

perturbações de primeira ordem

Nesta seção, consideremos o problema do autovalor λ associado com o auto vetor x .

$$Ax + \epsilon B(x) = \lambda x$$

Para que seja de uma equação algébrica, A deve ser uma matriz.

Como $\epsilon B(x)$ é uma pequena perturbação, não é necessário que $B(x)$ seja linear.

Buscamos auto soluções perturbadas para auto soluções imperturbadas com autovalor a e um auto vetor associado \mathbf{e} :

$$A\mathbf{e} = a\mathbf{e}$$

Se a Matriz A não é simétrica a sua, transposta e terá um auto vetor diferente \mathbf{e}^t associado ao autovalor.

$$\mathbf{e}^t A = a\mathbf{e}^t$$

Inicialmente restringiremos nossa atenção para o caso onde a é uma raiz simples com apenas um autovetor independente \mathbf{e} . então, \mathbf{e}^t é ortogonal a todos os outros auto vetores de A .

Apresentamos a expansão em potências de ϵ começando por uma autosolução não perturbada.

$$\mathbf{x}(\epsilon) = \mathbf{e} + \epsilon \mathbf{x}_1 + \epsilon^2 \mathbf{x}_2 + \dots$$

$$\lambda(\epsilon) = a + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

Substituindo na equação e comparando os coeficientes de ϵ^n temos:

Para ϵ^0 : $A\mathbf{e} = a\mathbf{e}$ automaticamente satisfeita.

Para ϵ^1 : $A\mathbf{x}_1 + B(\mathbf{e}) = a\mathbf{x}_1 + \lambda_1\mathbf{e}$

É útil rearranjar a equação para:

$$(A-a)\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{e} - B(\mathbf{e})$$

O lado esquerdo desta equação pode não ter componentes na direção de \mathbf{e} , pois para todo \mathbf{x}

$$\mathbf{e}^t \cdot [(A-a)\mathbf{x}_1] = [\mathbf{e}^t(A-a)] \mathbf{x}_1 = (a-a) \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{x}_1 = 0$$

Usando a propriedade do auto vetor \mathbf{e}^t logo não pode existir solução da equação para \mathbf{x}_1 a menos que o lado direito também não tenha componentes na direção \mathbf{e} , isto é:

$$\mathbf{e}^t \cdot [\lambda_1\mathbf{e} - B(\mathbf{e})] = 0$$

Logo encontraremos a primeira perturbação do autovalor:

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{e}^t \cdot B(\mathbf{e})}{\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e}}$$

Note que esta expressão mostra que se $B(\mathbf{e})$ é não linear os autovalores não são independentes da magnitude do autovetor.

Vamos retornar à equação para \mathbf{x}_1 e substituir a expansão para λ_1 para dar

$$(A-a)\mathbf{x}_1 = -B(\mathbf{e}) + \frac{\mathbf{e}^t \cdot B(\mathbf{e})}{\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e}} \mathbf{e} = -B(\mathbf{e})_1$$

onde a notação $B(\mathbf{e})_1$ foi introduzida para a parte de $B(\mathbf{e})$ perpendicular a \mathbf{e} . Agora que o lado direito não tem componentes na direção de \mathbf{e} é possível inverter $(A-a)$ para obter uma solução para \mathbf{x}_1 , todavia esta solução não é única por que é possível adicionar um múltiplo de valor arbitrário \mathbf{e} em \mathbf{x}_1 , sem alterar $(A-a)\mathbf{x}_1$. Logo, com k_1 sendo um escalar arbitrário

$$\mathbf{x}_1 = -(A-a)^{-1} B(\mathbf{e})_1 + k_1\mathbf{e}$$

Quanto à inversa $(A - a)^{-1}$ existe no espaço ortogonal à \mathbf{e} . Se a decomposição completa de A é conhecido \mathbf{x}_1 pode ser representado por um somatório sobre todos os autovalores de $\mathbf{e}^{(j)}$.

$$\mathbf{x}_1 = \sum_j \frac{\mathbf{e}^{(j)t} \cdot B(\mathbf{e})}{(a - a^{(j)})(\mathbf{e}^{(j)t} \cdot \mathbf{e}^{(j)})} \mathbf{e}^{(j)} + k_1 \mathbf{e}$$

Isso completa a perturbação de primeira ordem.

6.2 PERTURBAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

A perturbação de segunda ordem é governada por:

$$A\mathbf{x}_2 + B_1 = a\mathbf{x}_2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}$$

Agora B_1 é a mudança de ordem ϵ de $B(\mathbf{e})$ para $B(\mathbf{e} + \epsilon \mathbf{x}_1)$. Se B é linear, então $\mathbf{B}_1 = B\mathbf{x}_1$. Se B é não linear, então $\mathbf{B}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot B'(\mathbf{e})$ onde B' é a primeira derivada de B . Rejeitando a equação para \mathbf{x}_2 temos:

$$(A - a) \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{e} + \lambda_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{B}_1$$

Assim como no problema para \mathbf{x}_1 , devemos requerer que o lado direito não tenha componente na direção de \mathbf{e} . Isso leva para a segunda perturbação do autovalor

$$\lambda_2 = \frac{\mathbf{e}^t (\mathbf{B}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1)}{\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e}}$$

assim, com um escalar arbitrário k_2 , a segunda perturbação do autovetor é

$$\mathbf{x}_2 = -(A - a)^{-1} (\mathbf{B}_1 - \lambda_1 \mathbf{x}_1) + k_2 \mathbf{e}$$

Vimos nas expressões para λ_2 e \mathbf{x}_2 que seria conveniente para retirar a não unicidade de \mathbf{x}_1 requerendo que ele não tivesse componentes na direção do autovetor não perturbado isto é $\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{x}_1 = 0$. Em alguns problemas todavia é preciso uma normalização mais conveniente.

Se a decomposição completa de A é conhecida, e também se B é linear, o resultado de λ_2 pode ter a forma familiar.

$$\lambda_2 = \sum_j \frac{(\mathbf{e}^t \cdot B\mathbf{e}^{(j)})(\mathbf{e}^{(j)t} \cdot B\mathbf{e})}{(a - a^{(j)})(\mathbf{e}^{(j)t} \cdot \mathbf{e}^{(j)})(\mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e})}$$

O CASO DE RAÍZES MÚLTIPLAS

Suponha que o autovalor a de A está associado a mais de um auto vetor não-degenerado independente $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$. Consideraremos a perturbação em torno de um autovetor genérico no auto-espaço.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i + \epsilon \mathbf{x}_1 + \dots$$

$$\lambda = a + \epsilon \lambda_1 + \dots$$

substituindo na equação e comparando os coeficientes de mesma potência ϵ^n produz em ϵ^1 .

$$(A - a)\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i - \mathbf{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i \right)$$

No caso de raízes múltiplas, o lado esquerdo não pode ter nenhuma componente do auto espaço, logo podemos requerer que o lado direito não tenha componentes em nenhuma das direções independentes \mathbf{e}_i . Isso produz:

$$\lambda_1 \alpha_1 = \mathbf{e}_1^t \cdot \mathbf{B} \left(\sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i \right) / (\mathbf{e}_1^t \cdot \mathbf{e}_1)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\lambda_1 \alpha_n = \mathbf{e}_n^t \cdot \mathbf{B} \left(\sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i \right) / (\mathbf{e}_n^t \cdot \mathbf{e}_n)$$

Estas equações formam um novo problema de autovalor no auto espaço de A para encontrar o novo autovalor λ_i e autovetor α . Se \mathbf{B} é linear existirá n autovalores e, exceto em casos degenerados, n auto vetores independentes. Se \mathbf{B} é não-linear, é possível que não existam autovalores.

Em tais casos o auto-problema original não será auto-soluções perturbadas no auto-espaço do problema não perturbado.

O CASO DE RAÍZES MÚLTIPLAS DEGENERADAS

Raízes múltiplas degeneradas podem levar a uma expansão em potências não inteiras de ϵ . Considere a auto-solução degeneradas da forma normal de Jordan.

$$A\mathbf{e}_1 = a\mathbf{e}_1$$

$$A\mathbf{e}_2 = a\mathbf{e}_2 + c_2\mathbf{e}_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A\mathbf{e}_n = a\mathbf{e}_n + c_n\mathbf{e}_{n-1}$$

então se a perturbação $\epsilon \mathbf{B}(\mathbf{e})$ tem um componente na direção \mathbf{e}_n , como $\epsilon \mathbf{B}_n$, expansão terá potências de $\epsilon^{\frac{1}{n}}$, isto é:

$$\mathbf{x}(\epsilon) = \mathbf{e}_1 + \epsilon^{\frac{1}{n}} x_2 \mathbf{e}_2 + \epsilon^{\frac{2}{n}} x_3 \mathbf{e}_3 + \dots + \epsilon^{(n-1)/n} x_n \mathbf{e}_n + \dots$$

$$\lambda(\epsilon) = a + \epsilon^{\frac{1}{n}} \lambda_1 + \dots$$

Com solução

$$x_2 = \lambda_1 / c_2, \quad x_3 = \lambda_1^2 / c_2 c_3, \quad \dots \quad x_n = \lambda_1^{n-1} / c_2 c_3 \dots c_n$$

$$\epsilon \lambda_1 = (c_2 c_3 \dots c_n \mathbf{B}_n)^{\frac{1}{n}}$$

se os componentes de $\in \mathbf{B}(\mathbf{e})$ desaparecem nas direções de $\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2}, \dots, \mathbf{e}_n$ então a expansão terá potências de $\epsilon^{\frac{1}{k}}$.

BIBLIOGRAFIA

HINCH, E. J. "Perturbation Methods". Cambridge University Press, Cambridge – UK – 1992;

NAYFEH, A. H. "Perturbation Methods". John Wiley Sons – New York - 1973