UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
CAMPUS CATALÃO
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENÇAS E APLICAÇÃO NA PROPAGAÇÃO DE PLANTAS

MICHELE CRISTINA DA SILVA

Catalão
2007

MICHELE CRISTINA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENÇAS E APLICAÇÃO NA PROPAGAÇÃO DE PLANTAS

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão, para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientadora: Profa. Ms. Marta Borges

Catalão

2007

MICHELE CRISTINA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENÇAS E APLICAÇÃO NA PROPAGAÇÃO DE PLANTAS

Monografia defendida no Curso de Especialiazação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão, para obtenção do grau de Especialista em Matemática, aprovada em ___ de _________ de 2007, pela Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores:

____

Profa. Ms. Marta Borges - CAC/UFG

Presidente da Banca

____

Prof. Dr. Donald Mark Santee - CAC/UFG

____

Prof. Ms. Cleves Mesquita Vaz - CAC/UFG

Ao meu pai e à minha mãe que se orgulham de verem seus filhos realizando seus objetivos e por terem sido sempre um grande exemplo nas horas difíceis.
E, é claro, à minha orientadora Marta Borges, sem a qual este trabalho jamais teria se realizado com sucesso.

Agradecimentos

- À professora Marta Borges, o meu reconhecimento e orgulho pela atenção, empenho, responsabilidade e paciência na orientação deste trabalho. Faltam palavras para agradecer tamanha dedicação e disponibilidade.

- Às pessoas que contribuíram com todas as fases da realização deste trabalho, expresso minha gratidão a cada uma delas.

- Ao Departamento de Matemática do Campus Catalão - UFG, pela colaboração.

- Um agradecimento aos professores Marcelo Henrique Stoppa, Plínio José Oliveira, Donald Mark Santee, e outros professores do Departamento de Matemática pela colaboração no aprendizado.

- Registro os meus agradecimentos aos professores André Luis Galdino e Thiago Porto de Almeida Freitas pela colaboração no trabalho de digitação.

- Meu agradecimento ao José Eduardo e aos meus irmãos, especialmente à Luana pelo apoio nas correções.

- Aos professores da banca examinadora, pelas correções e sugestões, fundamentais para o aperfeiçoamento deste trabalho.

- Por fim, meus eternos agradecimentos a todos que, de algum modo, contribuíram para que eu alcançasse mais um objetivo.

- E a Deus, pela ajuda em todas as dificuldades, sem Ele certamente eu nada seria.

Resumo

Este trabalho faz um estudo sobre equações diferenças, enfatizando as equações diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes, especialmente as de segunda ordem.

Em seguida, como aplicação estudamos um modelo que ilustra a propagação anual de certos tipos de plantas. Neste caso, a equação diferença linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$p(n+2) - \alpha\sigma\gamma p(n+1) - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n) = 0,$$

onde $p(n)$ denota o número de plantas em qualquer geração n desejada e α, β, γ e σ são constantes não-negativas, modela o problema considerado. A propagação anual de plantas é assegurada por meio de condições estabelecidas sobre as constantes α, β, γ e σ, a partir do estudo das raízes da equação característica associada à equação diferença.

Abstract

This paper studies about difference equations, emphasizing the linear homogeneous difference equations with constant coefficients, specially the second order ones.

As an application we studied a model that describes the annual propagation of certain types of plants. In this case, the linear homogeneous second order difference equation with constant coefficients

$$p(n+2) - \alpha\sigma\gamma p(n+1) - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n) = 0,$$

where $p(n)$ denotes the number of plants in any generation n desired and α, β, γ and σ are non negative constants, models the considered problem. The annual propagation of plants is assured by established conditions over the constants α, β, γ and σ from the study of equation characteristic roots associated to the difference equation.

Índice

Introdução

Nas equações diferenciais ordinárias a variável independente é contínua. Quando a variável independente, ao invés de contínua, for discreta, isto é, as grandezas forem medidas em instantes isolados, formando uma seqüência, então fazem com que as equações diferenciais não tenham mais sentido, sendo substituídas pelas equações diferenças.

Cada valor da variável independente é um ponto, e a diferença entre um valor e o imediatamente anterior é chamado de período. Aqui consideramos períodos de uma unidade. A variável independente por ser inteira representa geralmente um tempo discreto como por exemplo, um ano ou um mês.

Estas equações têm sua importância em sistemas nos quais o comportamento futuro depende do passado e não existem derivadas envolvidas tais como, problemas de economia, biologia, combinatória, probabilidade e eletromagnetismo computacional. As equações diferenças ajudam a prever o crescimento populacional, com a utilização de certos parâmetros tais como, nascimento e natalidade, podendo assim estimar a população futura resolvendo um modelo de equações diferenças. Assim, modelos propostos, tais como: a propagação anual de plantas, a transmissão de informação, o crescimento de populações de coelhos e a dinâmica de populações de baleias, que podem ser encontrados em Boyce e DiPrima(2000); Elaydi (1996); Goldberg (1986) e Levy e Lessman (1992) são traduzidos matematicamente por equações diferenças que se enquadram em um dos tipos propostos neste estudo.

O capítulo 1 inicia-se com alguns conceitos básicos que serão úteis ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Define-se equação diferença, discute-se o problema de valor inicial e descreve as equações diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes.

No capítulo 2, são estudadas as equações diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução geral é obtida a partir de um conjunto fundamental de soluções.

Partindo dos resultados dos capítulos anteriores, no capítulo 3 determina-se um conjunto fundamental de soluções por meio do estudo das raízes da equação característica associada e como aplicação estuda-se um modelo para a propagação anual de plantas.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre equações diferenças e algumas propriedades das soluções das equações diferenças lineares com coeficientes constantes.

1.1 Definição de Equação Diferença

Definição 1.1.1. Uma *equação diferença* é uma relação da forma

$$F(n, y(n), y(n+1), \ldots, y(n+k-1), y(n+k)) = 0, \tag{1.1}$$

onde F é uma função real de $k+2$ variáveis assumindo valores reais.

Uma função $x : S \subseteq \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ é dita uma *solução* de (1.1) sobre S se os valores de x reduzem a equação diferença a uma identidade sobre S, isto é,

$$F(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k-1), x(n+k) = 0, \quad \forall n \in S.$$

Se uma função é uma solução de uma equação diferença, dizemos que ela satisfaz a equação diferença.

Definição 1.1.2. Uma equação diferença linear sobre um conjunto de valores $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ é *linear* se pode ser escrita na forma:

$$f_0(n)y(n+k) + f_1(n)y(n+k-1) + \ldots + f_{k-1}(n)y(n+1) + f_k(n)y(n) = r(n), \tag{1.2}$$

onde $f_0(n)$, $f_1(n)$, $\ldots$, $f_k(n)$ e $r(n)$ são funções reais de n definidas em S.

A equação (1.2) é de *ordem* k se f_0 e f_k são não-nulas em S.

Se $r(n)$ é identicamente zero sobre S, então a equação

$$f_0(n)y(n+k) + f_1(n)y(n+k-1) + \ldots + f_{k-1}(n)y(n+1) + f_k(n)y(n) = 0, \qquad (1.3)$$

é chamada *equação diferença linear homogênea*. Caso contrário, é dita *não-homogênea*.

Se em (1.2) as funções $f_0(n), \ldots, f_k(n)$ forem constantes sobre S, dizemos que a equação (1.2) é *linear com coeficientes constantes*. Escrevemos então,

$$f_0y(n+k) + f_1y(n+k-1) + \ldots + f_{k-1}y(n+1) + f_ky(n) = r(n). \qquad (1.4)$$

Quando o coeficiente de $y(n+k)$ for diferente de 1, por conveniência pode-se dividir a equação por esse coeficiente. Em geral, se a equação linear é de ordem k e f_0 é diferente de zero, então pode-se dividi-la por f_0 e renomear seus coeficientes, ou seja,

$$a_1 = \frac{f_1}{f_0}, \quad a_2 = \frac{f_2}{f_0}, \quad a_3 = \frac{f_3}{f_0}, \quad \ldots, \quad a_k = \frac{f_k}{f_0} \quad e \quad g_n = \frac{r_n}{f_0}.$$

Assim, obtém-se:

$$y(n+k) + a_1y(n+k-1) + \ldots + a_{k-1}y(n+1) + a_ky(n) = g(n). \qquad (1.5)$$

Com essa notação, pode-se escrever de forma geral as equações diferenças lineares com coeficientes constantes de ordem 1, 2 e 3 da seguinte maneira:

$$y(n+1) + a_1y(n) = g(n);$$

$$y(n+2) + a_1y(n+1) + a_2y(n) = g(n);$$

$$y(n+3) + a_1y(n+2) + a_2y(n+1) + a_3y(n) = g(n).$$

1.2 O Problema de Valor Inicial

Considere a equação (linear, homogênea, de primeira ordem, com coeficientes constantes)

$$y(n+1) = ay(n), \qquad (1.6)$$

$a \neq 0$ uma constante. Fixado arbitrariamente um número $y(0)$ (o qual chamaremos de valor inicial) temos:

$$y(1) = ay(0), \quad y(2) = ay(1) = a^2y(0), \quad y(3) = ay(2) = a^3y(0), \ldots, y(n) = a^ny(0).$$

Dizemos então que $y(n) = a^ny(0)$ é solução para a equação (1.6), com valor inicial $y(0)$.

Considere a equação

$$y(n+1) = y(n) + b, \tag{1.7}$$

onde b é uma constante não nula. Temos

$$y(1) = y(0) + b, \quad y(2) = y(0) + 2b, \quad y(3) = y(0) + 3b, \quad \ldots, \quad y(n) = y(0) + nb,$$

ou seja, $y(n) = y(0) + nb$ é solução para a equação (1.7), com valor inicial $y(0)$.

Agora, considerando a equação

$$y(n+1) = ay(n) + b,$$

onde a e b são constantes não nulas, e um valor inicial $y(0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&y(1) = ay(0) + b \\
&y(2) = a^2y(0) + (1+a)b \\
&y(3) = a^3y(0) + (1+a+a^2)b \\
&\vdots \\
&y(n) = a^ny(0) + (1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})b
\end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação $y(n+1) = ay(n) + b$ será

$$\begin{cases} y(n) = a^ny(0) + \dfrac{1-a^n}{1-a}b, & se \quad a \neq 1 \\ y(n) = y(0) + nb, & se \quad a = 1 \end{cases}$$

Observando, por outro lado, as seqüências

$$(y(0), \quad ay(0), \quad \ldots, \quad a^ny(0), \quad \ldots),$$

cujo termo geral é $y(n) = a^ny(0)$, e

$$(y(0), \quad y(0)+b, \quad y(0)+2b, \quad \ldots, y(0)+nb, \quad \ldots),$$

cujo termo geral é $y(n) = y(0) + nb$, identificamos uma progressão geométrica de razão a e uma progressão aritmética de razão b, respectivamente.

Estes exemplos mostram o que chamamos de *problema de valor inicial.*

Em geral, considere a equação

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_{k-1}y(n+1) + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{1.8}$$

em que $p_1(n)$, ..., $p_k(n)$ e $g(n)$ são funções reais definidas para todo n em um conjunto S tal que $n \geq n_0$ é um inteiro positivo.

Escrevemos a equação (1.8) na seguinte forma

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - p_2(n)y(n+k-2) - \ldots - p_{k-1}y(n+1) - p_k(n)y(n) + g(n) \tag{1.9}$$

Ao fazer $n = 0$ em (1.9) obtemos $y(k)$ em termos de $y(k-1)$, $y(k-2)$, ..., $y(0)$, ou seja,

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - p_2(0)y(k-2) - \ldots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

E ao fazer $n = 1$ na equação (1.9), teremos,

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - p_2(1)y(k-1) - \ldots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Assim, é possível avaliar todos os valores de $y(n)$ para $n \geq k$.

Vejamos a seguinte ilustração:

Exemplo 1.2.1. Considere a equação $y(n+3) - \frac{n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n$, onde $n > 0$ é inteiro. Sabendo-se que $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ e $y(3) = 1$, encontrar os valores de $y(4)$, $y(5)$, $y(6)$ e $y(7)$.

A equação dada pode ser escrita como

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n$$

Para $n = 1$, obtemos $y(4) = \frac{1}{2}y(3) - y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{5}{2}$

Para $n = 2$, obtemos $y(5) = \frac{2}{3}y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = \frac{-4}{3}$

Para $n = 3$, obtemos $y(6) = \frac{3}{4}y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = \frac{-5}{2}$

Para $n = 4$, obtemos $y(7) = \frac{4}{5}y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6}$

Concluímos com o seguinte resultado:

Teorema 1.2.1. *O problema de valor inicial*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_{k-1}(n)y(n+1) + p_k(n)y(n) = g(n), \qquad (1.10)$$

$$y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \ldots, y(n_0+k-1) = a_{k-1} \qquad (1.11)$$

onde a_i's são números reais, tem uma única solução y_n.

Demonstração.

Para provar a existência, consideremos as condições dadas para os k valores iniciais de $y(n_0)$, $y(n_0+1)$, $\quad y(n_0+2)$, $\quad \ldots, \quad y(n_0+k-1)$

Provaremos por indução sobre k que o valor de $y(n)$ é determinado.

Os valores iniciais determinam o valor de $y(n_0+k)$ unicamente. De fato, para cada $n = n_0$, temos:

$$y(n_0+k) = g(n_0) - p_1(n_0)y(n_0+k-1) - p_2(n)y(n+k-2) - \ldots - p_{k-1}(n_0)y(n_0+1) - p_k(n_0)y(n_0),$$

isto é, cada $y(n_0+k)$ é determinado.

Suponhamos por hipótese de indução, que $y(n)$ é determinada para todos os n valores acima e incluindo $y(n_0+j)$, onde $j \geq k$.

Basta mostrar que o valor seguinte $y(n_0+j+1)$ é também determinado.

Observe que $n_0+j+1 \geq n_0+k$, pois n_0, j e k são inteiros positivos.

Escrevemos então a equação diferença com $n = n_1 = n_0+j+1-k$ e obtemos:

$$y(n_0+j+1) = g(n_1) - p_1(n_1)y(n_0+j) - \ldots - p_{k-1}(n_1)y(n_0+j-k+2) - p_k(n_1)y(n_0+j-k+1)$$

Pela hipótese, os valores de y que aparecem do lado direito da igualdade são conhecidos. Ou seja, $y(n)$ é determinada, a partir dos k valores anteriormente determinados. Isto prova a existência.

Para a unicidade da solução $y(n)$, suponhamos que exista outra solução y^* do problema de valor inicial (1.10) e (1.11), isto é,

$$y^*(n+k) + p_1(n)y^*(n+k-1) + \ldots + p_{k-1}(n)y^*(n+1) + p_k(n)y^*(n) = g(n)$$

$$y^*(n_0) = a_0, \quad y^*(n_0+1) = a_1, \quad \ldots, \quad y^*(n_0+k-1) = a_{k-1}$$

Usando a equação (1.9) temos

$$y^*(n_0+k) = -p_1 y^*(n+k-1) - p_2 y^*(n+k-2) - \ldots - p_k(n)y^*(n) + g(n)$$

Considerando $n \geq n_0 + k$, teremos

$$\begin{aligned} y^*(n+k) &= -p_1(n_0)y^*(n_0+k-1) - p_2(n_0)y^*(n_0+k-2) - \ldots - p_k(n_0)y^*(n_0) + g(n_0) \\ &= -p_1(n_0)a_{k-1} - p_2(n_0)a_{k-2} - \ldots - p_k(n_0)a_0 + g(n_0) \\ &= -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - p_2(n_0)y(n_0+k-2) - \ldots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0) \\ &= y(n_0+k) \end{aligned}$$

Concluímos que $y^*(n) \equiv y(n)$, $\forall\, n \geq n_0$. □

1.3 Equações diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes

Consideremos a equação completa (linear, de ordem k, com coeficientes constantes)

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \ldots + a_{k-1}y(n+1) + a_k y(n) = g(n) \tag{1.12}$$

e a equação homogênea associada à (1.12)

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + \ldots + a_{k-1}y(n+1) + a_k y(n) = 0 \tag{1.13}$$

em que $a_1, \ldots, a_{k-1}$ e a_k são constantes.

Teorema 1.3.1. *Se $y_1(n)$ e $y_2(n)$ são duas soluções da equação diferença linear homogênea* (1.13), *então $c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$ é também uma solução para quaisquer constantes c_1 e c_2.*

Demonstração. Deve-se mostrar que se y_1 e y_2 satisfazem a equação (1.13) logo $c_1y_1(n) + c_2y_2(n)$ também é uma solução.

Substituindo $c_1y_1(n) + c_2y_2(n)$ no lado esquerdo de (1.13), logo:

$$c_1y_1(n+k)+c_2y_2(n+k)+a_1[c_1y_1(n+k-1)+c_2y_2(n+k-1)]+a_2[c_1y_1(n+k-2)+c_2y_2(n+k-2)]+$$

$$+\ldots+a_{k-1}[c_1y_1(n+1)+c_2y_2(n+1)]+a_k[c_1y_1(n)+c_2y_2(n)]=$$

$$c_1[y_1(n+k)+a_1y_1(n+k-1)+a_2y_1(n+k-2)+\ldots+a_{k-1}y_1(n+1)+a_ky_1(n)]+$$

$$c_2[y_2(n+k)+a_1y_2(n+k-1)+a_2y_2(n+k-2)+\ldots+a_{k-1}y_2(n+1)+a_ky_2(n)]=0$$

Conclui-se que, a soma acima é zero, pois por hipótese temos que $y_1(n)$ e $y_2(n)$ são soluções de (1.13). Portanto, $c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$ é também uma solução para quaisquer constantes c_1 e c_2.

□

O corolário a seguir assegura que pode-se adicionar mais de duas soluções e ainda ter uma solução da equação (1.13). Isto é, se $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_k(n)$ são soluções da equação (1.13), então a combinação linear finita

$$c_1y_1(n)+c_2y_2(n)+c_3y_3(n)+\ldots+c_ky_k(n)$$

é também solução de (1.13).

Corolário 1.3.2. *Qualquer combinação linear finita de soluções da equação diferença linear homogênea* (1.13) *é também uma solução desta equação diferença.*

Demonstração.

$$Y(n)=c_1y_1(n)+c_2y_2(n)+\ldots+c_ky_k(n)$$

é uma solução da equação homogênea (1.13).

Sabe-se que $y_1(n)$, $y_2(n)$, $\ldots$, $y_k(n)$ também são soluções de (1.13).

Observe inicialmente que se $y_i(n)$, $i=1,2,\ldots,k$, é solução de (1.13) então

$$y_i(n+k)+a_1y_i(n+k-1)+\ldots+a_{k-1}y_i(n+1)+a_ky_i(n)=0, \quad \forall i=1,2,\ldots,k$$

Observe ainda que para $k = 2$, $Y(n) = c_1 y_(n) + c_2 y_2(n)$ é solução de (1.13) de acordo com o teorema 1.3.1.

Por indução sobre i, suponhamos que

$$Y(n) = c_1 y_1(n) + \ldots + c_k y_k(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n)$$

seja solução de (1.13) e mostremos que

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i y_i(n)$$

também será uma solução de (1.13), sabendo-se que os $y_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ também são soluções de (1.13). No que segue, admitimos $a_0 = 1$.

Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{k+1} a_j c_i y_i(n+k-j) &= \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=0}^{k} c_i a_j y_i(n+k-j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} c_i a_j y_i(n+k-j) + \sum_{j=0}^{k} c_{k+1} a_j y_{k+1}(n+k-j) \end{aligned}$$

A primeira parcela da soma acima é zero, por hipótese de indução. Mais ainda, como $y_{k+1}(n)$ também é solução de (1.13), segue que

$$\sum_{j=0}^{k} c_{k+1} a_j y_{k+1}(n+k-j) = c_{k+1} \sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+k-j} = 0$$

Assim,

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{k+1} a_j c_i y_i(n+k-j) = 0$$

Portanto,

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i y_i(n)$$

é solução da equação de (1.13). □

Teorema 1.3.3. *Se Y é uma solução da equação homogênea* (1.13) *e y^* é uma solução da equação completa* (1.12)*, então $Y + y^*$ é uma solução da equação completa* (1.12).

Demonstração. Por hipótese, Y é uma solução da equação homogênea, logo:

$$Y(n+k) + a_1 Y(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} Y(n+1) + a_k Y(n) = 0$$

e y^* é uma solução da equação completa, isto é,

$$y^*(n+k) + a_1 y^*(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} y^*(n+1) + a_k y^*(n) = g(n).$$

Vamos verificar que $Y + y^*$ é solução de (1.12)

$$\begin{aligned}
& (Y+y^*)(n+k) + a_1(Y+y^*)(n+k-1) + \ldots + a_{k-1}(Y+y^*)(n+1) + \\
+ \; & a_k(Y+y^*)(n) \\
= \; & Y(n+k) + y^*(n+k) + a_1 Y(n+k-1) + a_1 y^*(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} Y(n+1) + \\
+ \; & a_{k-1} y^*(n+1) + a_k Y(n) + a_k y * (n) \\
= \; & Y(n+k) + a_1 Y(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} Y(n+1) + a_k Y(n) + y^*(n+k) + \\
+ \; & a_1 y^*(n+k-1) + \ldots + a_{k-1} y^*(n+1) + a_k y^*(n) \\
= \; & 0 + g(n) \\
= \; & g(n)
\end{aligned}$$

Portanto, $Y + y^*$ é uma solução da equação completa (1.12). □

Este teorema procura encontrar uma maneira de resolver a equação diferença completa (1.12).

Para ilustrar, vamos resolver para a equação linear de primeira ordem com coeficientes constantes,

$$y(n+1) + a_1 y(n) = g(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Primeiro consideramos a equação homogênea correspondente:

$$y(n+1) + a_1 y(n) = 0.$$

Teorema 1.3.4. *Considere a equação diferença linear de primeira ordem com coeficientes constantes*

$$y(n+1) + a_1 y(n) = g(n).$$

(a) *A função Y dada por $Y(n) = c(-a_1)^n$, com c uma constante arbitrária, é chamada de solução geral da equação homogênea correspondente*

$$y(n+1) + a_1 y(n) = 0.$$

(b) *Se y^* é qualquer solução particular da equação completa, então $Y+y^*$ é uma solução geral da equação completa, ou seja, se y é alguma solução da equação diferença completa, há um valor da constante c para cada*

$$Y(n) = c(-a_1)^n + y^*(n).$$

Demonstração. **(a)** Temos:

$$y(n+1) + a_1 y(n) = 0.$$

Por hipótese $Y(n) = c(-a_1)^n$ é solução da equação homogênea acima, logo:

$$\begin{aligned} y(n+1) + a_1 y(n) &= c(-a_1)^{n+1} + a_1 c(-a_1)^n \\ &= c(-a_1)^n(-a_1)^1 + a_1 c(-a_1)^n \\ &= -a_1 c(-a_1)^n + a_1 c(-a_1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $Y(n)$ é solução da equação homogênea.

(b) Seja y uma solução qualquer da equação completa. Pelo teorema (1.3.3), a função $Y+y^*$ é uma solução da equação completa para cada valor da constante c. Nós devemos mostrar que existe um valor de c para cada $Y + y^*$ e y é a mesma solução. Mas duas soluções da equação diferença linear de primeira ordem que tem o mesmo valor quando $n = 0$, são idênticas, devido ao teorema (1.2.1) . Assim, nossa demonstração será completa se c puder ser determinado. Temos

$$y(0) = c(-a_1)^0 + y^*(0), \qquad mas(-a_1)^0 = 1$$

$$y(0) = c + y^*(0).$$

Logo,

$$c = y(0) - y^*(0),$$

é o valor da constante c que procurávamos.

$\square$

Capítulo 2

Equações diferenças lineares de segunda ordem

Neste capítulo enfatizamos as equações diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes estudando condições para que duas soluções formem um conjunto fundamental de soluções, determinando assim a solução geral.

2.1 Conjunto Fundamental de Soluções

Consideremos o problema de encontrar a solução geral de equações diferença lineares de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = g(n). \tag{2.1}$$

A equação homogênea correspondente é

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0. \tag{2.2}$$

Inicialmente, vamos ilustrar com um exemplo.

Considere a equação linear com coeficientes constantes

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 4, \tag{2.3}$$

cuja equação homogênea correspondente é

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 0. \tag{2.4}$$

Nosso objetivo é

1. Encontrar a solução geral da equação homogênea (2.4);

2. Encontrar uma solução particular da equação completa (2.3),

e então provar que a soma destas soluções é a solução geral da equação completa.

A equação diferença homogênea (2.4) tem duas soluções y_1 e y_2 dadas por:

$$y_1(n) = 2^n \quad e \quad y_2(n) = 3^n. \tag{2.5}$$

De fato:

$$\begin{aligned} y_1(n+2) - 5y_1(n+1) + 6y_1(n) &= 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n \\ &= 2^n \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^n \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^n \\ &= 2^n[4 - 10 + 6] \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_2(n+2) - 5y_2(n+1) + 6y_2(n) &= 3^{n+2} - 5 \cdot 3^{n+1} + 6 \cdot 3^n \\ &= 3^n \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^n \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^n \\ &= 3^n[9 - 15 + 6] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.3.1, se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferença linear homogênea então $c_1y_1(n) + c_2y_2(n)$ é também uma solução para quaisquer constantes c_1 e c_2, isto é,

$$Y(n) = c_1 2^n + c_2 3^n, \tag{2.6}$$

é também uma solução da equação homogênea para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2.

Mostraremos que Y é a solução geral da equação homogênea (2.4). Isto significa que se y é qualquer solução de (2.4), nesse caso os valores de c_1 e c_2 podem ser encontrados de forma que Y e y são idênticos.

A unicidade do teorema 1.2.1 mostra que duas soluções da equação linear de ordem 2 são idênticas se elas coincidem seus valores para dois valores consecutivos de n, digamos $n = 0$ e $n = 1$.

Portanto, é suficiente mostrar que c_1 e c_2 podem ser determinados tal que:

$$Y(0) = y(0) \quad e \quad Y(1) = y(1)$$

para quaisquer números $y(0)$ e $y(1)$.

De (2.6),

$$Y(0) = c_1 2^0 + c_2 3^0 = c_1 + c_2$$

$$Y(1) = c_1 2^1 + c_2 3^1 = 2c_1 + 3c_2$$

então c_1 e c_2 devem satisfazer as duas equações, ou seja, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ y(1) = 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

Multiplicando-se a primeira equação por 2 e segunda equação por -1 obtemos $c_2 = y(1) - 2y(0)$, isto é,

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = 2y(0) \\ -2c_1 - 3c_2 = -y(1) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 3y(0) - y(1) \\ c_2 = y(1) - 2y(0) \end{cases}$$

O que completa nossa demonstração, já que mostramos que c_1 e c_2 podem ser determinados tal que $Y(0) = y(0)$ e $Y(1) = y(1)$ para quaisquer números $y(0)$ e $y(1)$.

Resumindo, a solução Y pode ser determinada com uma escolha apropriada para c_1 e c_2 de acordo com os valores $y(0)$ e $y(1)$ de uma solução qualquer. Isso faz com que Y e y sejam idênticas, assim mostrando que Y é a solução geral da equação diferença homogênea.

Ao retornarmos à equação não-homogênea (2.3), vamos procurar soluções da forma $y^*(n) = A$. Então,

$$y^*(n+2) - 5y^*(n+1) + 6y^*(n) = 4$$

$$A - 5A + 6A = 4$$

$$A = 2.$$

Assim, $y^*(n) = 2$ é uma solução particular procurada. Como para as equações de primeira ordem, é possível mostrar que a soma $y = Y + y^*$ tal que

$$y(n) = Y(n) + y^*(n) = c_1 2^n + c_2 3^n + 2$$

é a solução geral da equação completa (2.3).

De fato,

$$\begin{aligned} y(n) &= Y(n) + y^*(n) \\ &= Y(n+2) + y^*(n+2) - 5[Y(n+1) + y^*(n+1)] + 6[Y(n) + y^*(n)] \\ &= c_1 2^{n+2} + c_2 3^{n+2} + 2 - 5(c_1 2^{n+1} + c_2 3^{n+1} + 2) + 6(c_1 2^n + c_2 3^n + 2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Observe que duas quaisquer soluções y_1 e y_2 não podem ser consideradas. Se considerarmos $y_1(n) = 2^n$ e $y_2(n) = 5 \cdot 2^n$ ambas são certamente soluções da equação homogênea (2.4). Então,

$$Y(n) = c_1 2^n + c_2 5 \cdot 2^n$$

é uma nova solução, mas não é a solução geral. Com efeito, seria necessário que $Y(0) = y(0)$ e $Y(1) = y(1)$ levasse às equações

$$\begin{cases} c_1 + 5c_2 = y(0) \\ 2c_1 + 10c_2 = y(1) \end{cases}$$

Este conjunto com duas equações lineares simultâneas para as incógnitas c_1 e c_2 não tem solução para todos pares de valores iniciais $y(0)$ e $y(1)$. De fato, se $y(1) = 2y(2)$, então a segunda equação é idêntica à primeira dividida por 2. Temos, então uma equação com duas incógnitas e existem infinitos pares de valores c_1 e c_2 que satisfazem tal equação. E, se $y(1) \neq 2y(0)$ então as duas equações no sistema acima são incompatíveis e não tem solução.

Este exemplo ilustra que, para estabelecer a teoria geral da equação (2.1), devemos fazer as seguintes considerações:

1. Em que condições devemos dizer que, dadas duas soluções particulares y_1 e y_2 da equação homogênea (2.2),

$$Y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n),$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é solução geral de $y(n+2)+a_1 y(n+1)+a_2 y(n) = 0$?

2. Se $y^*(n)$ é uma solução particular da equação completa (2.1) e $Y(n)$ é solução geral da equação homogênea (2.2), então $Y(n) + y^*(n)$ é a solução geral de (2.1)?

3. Existem métodos sistemáticos para obter as soluções particulares $y_1(n)$ e $y_2(n)$?

Para responder a primeira pergunta, é necessário conhecer um resultado da álgebra referente a sistemas de equações lineares simultâneas. Dizemos que o sistema com duas equações com duas incógnitas x e y

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

onde a, b, c, d, e e f são constantes, tem solução (x_0, y_0) se ambas equações são verdadeiras quando $x = x_0$ e $y = y_0$. Temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *O sistema de equações simultâneas*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

tem uma única solução se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

O número $ad - bc$ é freqüentemente escrito como um determinante na forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Este número é conhecido por ser o determinante formado pelos coeficientes x e y no sistema acima. Verifica-se que o determinante do sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ y(1) = 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

para que se tenha uma única solução, é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 1.2 = 1 \neq 0.$$

Enquanto que

$$\begin{cases} c_1 + 5c_2 = y(0) \\ 2c_1 + 10c_2 = y(1) \end{cases}$$

não tem solução única, pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 1.10 - 5.2 = 0.$$

Teorema 2.1.2. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação diferença homogênea* (2.2) *e seja*

$$Y = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Se

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = y_1(0)y_2(1) - y_2(0)y_1(1) \neq 0,$$

então Y é a solução geral de (2.2).

Demonstração. Pelo teorema 1.3.1, Y é uma solução de (2.2). Basta mostrar que se y é outra solução de (2.2), c_1 e c_2 podem ser determinados tal que Y e y sejam idênticas. Pela unicidade do teorema 1.2.1, é suficiente mostrar que Y e y são iguais para $n = 0$

e $n = 1$. Isto é, devemos determinar c_1 e c_2 tal que $Y(0) = y(0)$ e $Y(1) = y(1)$ para qualquer escolha de $y(0)$ e $y(1)$.

Mas,

$$Y(0) = c_1y_1(0) + c_2y_2(0)$$

$$Y(1) = c_1y_1(1) + c_2y_2(1).$$

Assim, c_1 e c_2 devem satisfazer as equações

$$\begin{cases} y_1(0)c_1 + y_2(0)c_2 = y(0) \\ y_1(1)c_1 + y_2(1)c_2 = y(1). \end{cases}$$

O sistema acima tem duas equações com incógnitas c_1 e c_2. Temos por hipótese que o determinante da matriz formada pelos coeficientes de c_1 e c_2 é diferente de zero. Pelo teorema 2.1.1, existem únicos valores de c_1 e c_2 para cada escolha de $y(0)$ e $y(1)$ e portanto

$$Y(n) = c_1y_1(n) + c_2y_2(n).$$

□

O determinante que aparece em (2.1.3) é chamado *Casoratiano* das soluções y_1 e y_2. Ele é o análogo discreto ao determinante Wronskiano em equações diferenciais lineares. Em geral, o Casoratiano, indicado por C_n é dado por:

$$C_n = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) \end{vmatrix}$$

para equações lineares de segunda ordem.

Definição 2.1.3. Duas soluções y_1 e y_2 da equação (2.2) que satisfazem a condição

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = y_1(0)y_2(1) - y_2(0)y_1(1) \neq 0$$

são ditas um conjunto fundamental de soluções de (2.2).

Teorema 2.1.4. *Se y^* é uma solução particular de* (2.1) *e y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de* (2.2)*, então a solução geral de* (2.1) *é dada por*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y^*,$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Demonstração. Segue do teorema 1.3.3 que y é uma solução de (2.1). Que é solução geral é provado no teorema 2.1.2. Basta fazer uma substituição, neste caso, c_1 e c_2 devem satisfazer as equações

$$y_1(0)c_1 + y_2(0)c_2 = y(0) - y^*(0),$$

$$y_1(1)c_1 + y_2(1)c_2 = y(1) - y^*(1).$$

A hipótese que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções assegura a existência de c_1 e c_2 para qualquer escolha de $y(0)$ e $y(1)$. □

Exemplo 2.1.1. A equação diferença

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = -1, \qquad (2.7)$$

tem uma solução particular dada por $y^*(n) = n$, como podemos verificar com uma substituição direta:

$$\begin{aligned} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) &= n + 2 - 3(n+1) + 2n \\ &= n + 2 - 3n - 3 + 2n \\ &= -1. \end{aligned}$$

Similarmente, podemos mostrar que a equação homogênea

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0 \qquad (2.8)$$

tem duas soluções y_1 e y_2 dada por $y_1(n) = 1$ e $y_2(n) = 2^n$.

É importante ressaltar que o objetivo aqui é mostrar que as soluções são válidas e não utilizar métodos sistemáticos para obter estas soluções.

Essas duas soluções formam um conjunto fundamental desde que

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Portanto, pelos teoremas 2.1.2 e 2.1.4, neste caso

$$Y(n) = c_1 + c_2 2^n \tag{2.9}$$

é a solução geral da equação homogênea (2.8) e

$$y(n) = c_1 + c_2 2^n + n \tag{2.10}$$

é a solução geral de (2.7).

Se quisermos uma solução de (2.7) para que as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(1) = 3$ devemos determinar valores c_1 e c_2. De (2.10), colocando $n = 0$ e $n = 1$ e usando as condições iniciais dadas acima, obteremos:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ y(1) = c_1 + 2c_2 + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 2. \end{cases}$$

Logo, $c_2 = 2$ e $c_1 = -2$, e assim a solução dada por

$$y(n) = -2 + 2 \cdot 2^n + n$$

ou

$$y(n) = -2 + 2^{n+1} + n$$

satisfaz tanto a equação diferença (2.7) como as condições iniciais dadas.

Similarmente, podemos mostrar que se as condições iniciais são $y(0) = -3$ e $y(1) = 5$, teremos

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ y(1) = c_1 + 2c_2 + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -3 \\ c_1 + 2c_2 = 4. \end{cases}$$

Daí, $c_1 = -10$ e $c_2 = 7$ e assim, obtemos a seguinte solução

$$y(n) = -10 + 7 \cdot 2^n + n.$$

Em geral, para cada condição inicial estabelecida determinamos quaisquer dois valores para y (não necessariamente $y(0)$ e $y(1)$) nos possibilitando determinar valores de c_1 e c_2 para cada solução dada em (2.10), que satisfaça essas condições.

2.2 Estudo das raízes da equação característica

De acordo com o que vimos no teorema 2.1.2 ao encontrar duas soluções que formam um conjunto fundamental de soluções, encontramos a solução geral da equação homogênea

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0. \tag{2.11}$$

Considerando λ uma constante diferente de zero, então vamos investigar a existência de soluções da equação diferença da forma

$$y(n) = \lambda^n. \tag{2.12}$$

Quando $\lambda = 0$, tem-se y identicamente zero, uma solução que não pode formar um conjunto fundamental.

Se substituirmos (2.12) em (2.11), então

$$\lambda^{n+2} + a_1\lambda^{n+1} + a_2\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$$

Como $\lambda^n \neq 0$, obtemos

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{2.13}$$

Esta equação é chamada *equação característica* associada à equação diferença (2.11). Se λ é um número que satisfaz a equação característica, então (2.12) é a solução da equação diferença (2.11) e λ é chamada *raiz característica* de (2.13).

A equação característica é uma equação algébrica quadrática, desde que $a_2 \neq 0$, e portanto tem duas raízes diferentes de zero, digamos λ_1 e λ_2.

Estas raízes correspondem às soluções

$$y_1(n) = \lambda_1^n \quad e \quad y_2(n) = \lambda_2^n. \tag{2.14}$$

Temos três casos a considerar:

1. As raízes λ_1 e λ_2 são reais e distintas;

2. As raízes λ_1 e λ_2 são reais e iguais;

3. As raízes λ_1 e λ_2 são complexas.

2.2.1 Caso 1: Raízes Reais e Distintas.

As soluções $y_1(n) = \lambda_1^n$ e $y_2(n) = \lambda_2^n$ formam um conjunto fundamental de soluções quando o determinante Casoratiano for diferente de zero, como vimos no teorema 2.1.2. O casoratiano

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$$

é diferente de zero, desde que $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Portanto, pelo teorema 2.1.2, a solução geral da equação diferença homogênea (2.11) é dada por:

$$Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n. \tag{2.15}$$

Exemplo 2.2.1. **(a)** A equação diferença $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$ tem equação característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ com raízes reais e distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, a solução geral é dada por

$$Y(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n = c_1 + c_2 \cdot 2^n.$$

(b) A equação diferença $y(n+2) + 3y(n_1) + y(n) = 0$ tem equação característica $\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$. As raízes desta equação são $\lambda_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

As raízes são reais e distintas, então a solução geral é dada por:

$$Y(n) = c_1\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2.2.2 Caso 2: Raízes Reais e Iguais.

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes de (2.14) com $\lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso λ_1^n e λ_2^n não formam um conjunto fundamental de soluções pois o Casoratiano é zero. Ao tomar $y_1(n) = \lambda_1^n$, procuramos outra função y_2 para constituir, juntamente com y_1, um conjunto fundamental de soluções.

Considere $y_2(n) = n\lambda_1^n$, que também é solução da equação (2.11). De fato, substituindo y_2 na equação obtemos:

$$\begin{aligned} y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) &= (n+2)\lambda_1^{n+2} + a_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + a_2 n\lambda_1^n \\ &= n\lambda_1^{n+2} + 2\lambda_1^{n+2} + a_1 n\lambda_1^{n+1} + a_1\lambda_1^{n+1} + a_2 n\lambda_1^n \\ &= n\lambda_1^n(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + \lambda_1^{n+1}(2\lambda_1 + a_1). \end{aligned}$$

O termo que está entre o primeiro parêntese é zero pois λ_1 é raiz da equação característica. Por outro lado, por serem raízes de parábola a soma das raízes da equação característica é dada por:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-a_1}{1} = -a_1.$$

Mas, se $\lambda_1 = \lambda_2$, a soma é $2\lambda_1 = -a_1$. Portanto, o termo que está entre o segundo parêntese é zero, pois $2\lambda_1 + a_1 = -a_1 + a_1 = 0$.

Assim, $y(n+2)+a_1y(n+1)+a_2y(n) = 0$, então $y_2(n) = n\lambda_1^n$ é solução da equação diferença.

As duas soluções $y_1(n) = \lambda_1^n$ e $y_2(n) = n\lambda_1^n$ formam um conjunto fundamental de soluções pois o casoratiano é diferente de zero.

De fato,

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \neq 0.$$

Concluímos que a solução geral da equação (2.11) neste caso será

$$Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$$

ou

$$Y(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda_1^n.$$

Exemplo 2.2.2. (a) A equação diferença $y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0$ tem equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, com duas raízes iguais $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Portanto, a solução geral é dada por

$$Y(n) = c_1 + c_2 n.$$

(b) A equação diferença $4y(n+2) + 4y(n+1) + y(n) = 0$ tem equação característica $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ e suas raízes são

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-1}{2}.$$

Portanto, a solução geral será dada por

$$Y(n) = (c_1 + c_2 n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

2.2.3 Caso 3: Raízes Complexas

As raízes complexas da equação de segundo grau com coeficientes reais sempre acontecem em pares conjugados. Logo, se λ_1 e λ_2 são raízes complexas conjugadas da equação característica, então $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e assim as duas soluções $y_1(n) = \lambda_1^n$ e $y_2(n) = \lambda_2^n$ formam um conjunto fundamental de soluções.

A solução geral é dada por

$$y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Essa solução pode ser um número complexo se λ_1 e λ_2 forem números complexos.

Se c_1 e c_2 são complexos conjugados, $Y(n)$ é sempre um número real. Para provar isso, se escreve o número complexo na forma polar

$$\lambda_1 = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad e \quad \lambda_2 = r(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{2.16}$$

Assume que c_1 e c_2 são complexos conjugados, assim

$$c_1 = a(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \quad e \quad c_2 = a(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta). \tag{2.17}$$

Pela fórmula de Moivre, $\lambda_1^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$ e $\lambda_2^n = r^n(\cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$.

Portanto, utilizando as regras para multiplicação de números complexos, obtemos a seguinte simplificação para $Y(n)$

$$\begin{aligned} Y(n) &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \\ &= ar^n[\cos(n\theta + B) + i\,\mathrm{sen}(n\theta + B)] + ar^n[\cos(n\theta + B) - i\,\mathrm{sen}(n\theta + B)] \\ &= 2ar^n\cos(n\theta + B). \end{aligned}$$

Este é um número real, como queríamos mostrar.

Os números r e θ são determinados de (2.16) escrevendo as raízes da equação característica na forma polar, isto é, considerando

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

para encontrar r e θ.

As constantes a e B tomam o lugar das constantes c_1 e c_2. Se denotarmos a constante $2a$ por A, então a solução da equação diferença homogênea quando a equação característica tem raízes complexas pode ser escrita na forma

$$Y(n) = Ar^n\cos(n\theta + B), \tag{2.18}$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Exemplo 2.2.3. **(a)** A equação diferença $y(n+2)+y(n) = 0$ tem equação característica $\lambda^2+1 = 0$ com raízes $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Ao escrever λ_1 na forma polar, encontramos $r = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, assim $\lambda_1 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$.

Logo, da equação (2.18) tem-se que a solução geral é dada por:

$$Y(n) = A\cos\left(\frac{n\pi}{2} + B\right). \tag{2.19}$$

Ao procurar uma solução específica de $y(n+2) + y(n) = 0$ que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, encontramos em (2.19) que A e B devem satisfazer as equações:

$$0 = A\cos B,$$

$$1 = A\cos\left(\frac{\pi}{2} + B\right).$$

A primeira delas é satisfeita para $B = \dfrac{\pi}{2}$. Então, a segunda torna $1 = A\cos\pi$, que faz $A = -1$, desde que $\cos\pi = -1$. Encontramos a solução procurada colocando os valores de A e B em (2.18), assim

$$y(n) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Para um θ qualquer tem-se

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\theta.$$

Portanto, $y(n) = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$ produz a solução da equação diferença dada para que $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

(b) A equação diferença

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0 \tag{2.20}$$

tem como equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ cujas raízes são $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. Na forma polar,

$$\lambda_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Portanto, a solução geral de (2.20) é dada por:

$$Y(n) = A\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4} + B\right).$$

Os resultados apresentados nesta seção estão resumidos no seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Se*

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0 \tag{2.21}$$

onde a_1 *e* a_2 *são constantes e* $a_2 \neq 0$, *e se* λ_1 *e* λ_2 *são duas raízes da equação característica*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

a solução geral da equação diferença (2.21) *é dada por*

(a) $Y(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ *se* λ_1 *e* λ_2 *são raízes reais e distintas;*

(b) $Y(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda_1^n$ *se* λ_2 *é igual a* λ_1*;*

(c) $Y(n) = Ar^n\cos(n\theta + B)$ *se* λ_1 *e* λ_2 *são complexos conjugados com formas polares*

$$r(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta).$$

Capítulo 3

Comportamento das soluções

No capítulo anterior, estabelecemos a solução geral da equação diferença linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes e determinamos um conjunto fundamental de soluções. Neste capítulo, estudaremos o comportamento das soluções a partir das raízes da equação característica associada. Como aplicação estudaremos um modelo para a propagação anual de plantas.

3.1 Estudo do comportamento das soluções

Seja

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0 \tag{3.1}$$

uma equação diferença de segunda ordem.

Inicialmente vamos destacar alguns resultados sobre seqüências de números reais, que podem ser encontrados em LIMA (1992, p. 80).

Observação 3.1.1. 1. Diz-se que a seqüência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí resulta que (x_n) é limitada se, e somente se, $(\mid x_n \mid)$ é limitada.

2. Quando uma seqüência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

3. Uma seqüência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe um número real

b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, diz-se que (x_n) é limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Uma seqüência (x_n) chama-se crescente quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n, a seqüência diz-se não-decrescente.

5. Analogamente, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a seqüência (x_n) diz-se decrescente. Ela é chamada não-crescente quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. As seqüências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-decrescentes são chamadas seqüências monótonas.

Seja $a \in \mathbb{R}$. Consideremos a seqüência $(a, a^2, a^3, ..., a^n, ...)$ das potências de a, com expoente n inteiro positivo.

7. Se $a = 0$ ou $a = 1$, tem-se evidentemente um seqüência constante.

8. Se $0 < a < 1$, a seqüência é decrescente, limitada. Como todos os membros são positivos, temos $0 < a^n < 1$ para todo n.

9. O caso $-1 < a < 0$, a seqüência (a^n) não é mais monótona (seus termos são alternadamente positivos e negativos) mas ainda é limitada.

10. O caso $a = -1$ é trivial: a seqüência (a^n) é $(-1, +1, -1, +1, ...)$.

11. Quando $a > 1$ obtém-se uma seqüência crescente ilimitada.

12. Finalmente, quando $a < -1$, a seqüência (a^n) não é monótona (pois seus termos são alternadamente positivos e negativos) e é ilimitada superior e inferiormente.

A demonstração de cada um desses casos pode ser encontrada em Lima (1992, p. 80).

Supondo que λ_1 e λ_2 são as raízes características da equação (3.1), então tem-se os seguintes resultados:

Observação 3.1.2. 1. Raízes reais e distintas.

Temos que $y_1(n) = \lambda_1^n$ e $y_2(n) = \lambda_2^n$ são duas soluções linearmente independente da equação (3.1).

Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, então chamamos $y_1(n)$ de solução dominante, e λ_1 é chamada de raiz característica dominante. Caso contrário, $y_2(n)$ é solução dominante e λ_2 é a raiz característica dominante.

O comportamento da solução geral $y(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$ é determinado pelo comportamento da solução dominante. Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Então,

$$y(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n,$$

ou seja,

$$y(n) = \lambda_1^n \left[a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Como $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$, $\quad \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \to 0$ quando $n \to \infty$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty} a_1\lambda_1^n.$$

De acordo com o valor de λ_1 e considerando a observação 3.1.1, tem-se seis casos a considerar:

a) $\lambda_1 > 1$: a seqüência (λ_1^n) é crescente ilimitada, assim a seqüência $(a_1\lambda_1^n)$ diverge para ∞.

b) $\lambda_1 = 1$: a seqüência evidentemente é constante.

c) $0 < \lambda_1 < 1$: a seqüência $(a_1\lambda_1^n)$ decresce para zero.

d) $-1 < \lambda_1 \leq 0$: a seqüência $(a_1\lambda_1^n)$ converge para zero.

e) $\lambda_1 = -1$: a seqüência $(a_1\lambda_1^n)$ oscila entre os valores de a_1 e $-a_1$.

f) $\lambda_1 < -1$: a seqüência $(a_1\lambda_1^n)$ não é monótona, mas é ilimitada superior e inferiormente.

2. Raízes reais e iguais.

   A solução geral da equação (3.1) é dada por $y(n) = (a_1 + a_2 n)\lambda^n$. Pela observação 3.1.1 temos que se $|\lambda| \geq 1$, então a solução $y(n)$ diverge monotonicamente se $\lambda \geq 1$ ou oscila se $\lambda_1 \leq -1$; se $|\lambda| < 1$, então a solução converge para zero desde que $\lim_{n\to\infty} n\lambda^n = 0$.

3. Raízes complexas.

   Sejam $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde $\beta \neq 0$.

   A solução da equação (3.1) é dada por:

$$y(n) = ar^n \cos(n\theta - \omega)$$

   onde $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\theta = tan^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

   A solução $y(n)$ oscila desde que a função cosseno oscile. Assim, $y(n)$ oscila em três casos diferentes dependendo da localização das raízes características conjugadas.

   a) $r > 1 : \lambda_1$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

   As raízes estão no lado de fora do círculo unitário. Portanto, $y(n)$ é oscilante, mas cresce em amplitude.

   b) $r = 1 : \lambda_1$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

   As raízes estão no círculo unitário. Neste caso, $y(n)$ é oscilante mas tem amplitude constante.

   c) $r < 1 : \lambda_1$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

   As raízes estão no interior do círculo unitário. A solução $y(n)$ oscila mas converge para zero quando $n \to \infty$.

Teorema 3.1.1. *1. Toda solução da equação* (3.1) *oscila (em torno de zero) se, e somente se, a equação característica não tem raízes características reais positivas.*

2. Toda solução da equação (3.1) *converge para zero se, e somente se*

$$max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1.$$

3.2 Aplicação

3.2.1 Um Modelo Matemático para a Propagação Anual de Plantas

Vamos analisar um modelo matemático que descreve o número de plantas em qualquer geração desejada. Sabe-se que algumas plantas produzem sementes que se desenvolvem no final de uma estação do ano (em Agosto), depois elas morrem. Somente uma fração dessas sementes sobrevivem ao inverno e as que sobrevivem germinam no início da estação do ano (em Maio) o que dá forças para uma nova geração de plantas.

Sejam

γ = número de sementes produzidas por planta em Agosto.

α = fração de sementes com um ano de idade que germinam em Maio.

β = fração de sementes com dois anos de idade que germinam em Maio.

σ = fração de sementes que sobrevivem a um dado inverno.

Seja $p(n)$ o número de plantas na geração n, então

$p(n)$=(*plantas originadas de sementes com um ano de idade*) + (*plantas originadas de sementes com dois anos de idade*). Assim,

$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \tag{3.2}$$

onde $s_1(n)$ é o número de sementes com um ano de idade em abril antes da germinação e $s_2(n)$ é o número de sementes com dois anos de idade também em abril antes da germinação. As sementes que restaram depois da germinação podem ser escritas como:

sementes que restaram = (*fração não germinada*) * (*número original de sementes em abril*)

Isto produz as duas equações a seguir:

$$\widetilde{s}_1(n) = (1-\alpha)s_1(n) \tag{3.3}$$

e

$$\widetilde{s}_2(n) = (1-\beta)s_2(n), \tag{3.4}$$

onde $\widetilde{s}_1(n)$ é o número de sementes que restaram com um ano de idade em Maio depois que algumas tenham germinado e $\widetilde{s}_2(n)$ é o número de sementes que restaram com dois anos de idade também em Maio depois que algumas tenham germinado. É necessário que sementes novas $s_0(n)$ (0 anos de idade) sejam produzidas em Agosto na taxa de γ por planta, isto é,

$$s_0(n) = \gamma p(n). \tag{3.5}$$

Após o inverno, as sementes $s_0(n)$ que são novas na geração n terão um ano de idade, na próxima geração $n+1$ e uma fração $\sigma s_0(n)$ delas que sobreviverá.

Portanto, $s_1(n+1) = \sigma s_0(n)$ ou usando a equação (3.5) temos:

$$s_1(n+1) = \sigma\gamma p(n). \tag{3.6}$$

Do mesmo modo,

$$s_2(n+1) = \sigma\widetilde{s}_1(n),$$

que pela equação (3.3) tem-se que:

$$s_2(n+1) = \sigma(1-\alpha)s_1(n).$$

Pela equação (3.6):

$$s_2(n+1) = \sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p(n-1),$$

ou seja,

$$s_2(n+1) = \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1). \tag{3.7}$$

Substituindo as equações (3.6) e (3.7) em (3.2) teremos:

$$p(n+1) = \alpha s_1(n+1) + \beta s_2(n+1)$$

$$p(n+1) = \alpha\sigma\gamma p(n) + \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1)$$

ou

$$p(n+2) = \alpha\sigma\gamma p(n+1) + \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n).$$

Observe que esta equação pode ser escrita como

$$p(n+2) - \alpha\sigma\gamma p(n+1) - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n) = 0. \tag{3.8}$$

A equação (3.8) modela o problema considerado. É uma equação diferença linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. A seguir vamos estudar as raízes da equação característica para estabelecer condições sobre as constantes α, β, γ e σ que asseguram a propagação de plantas.

Se $p(n) = \lambda^n$ é uma solução da equação dada, teremos

$$\lambda^{n+2} - \alpha\sigma\gamma\lambda^{n+1} - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)\lambda^n = 0$$

$$\lambda^n(\lambda^2 - \alpha\sigma\gamma\lambda - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha)) = 0.$$

Assim,

$$\lambda^2 - \alpha\sigma\gamma\lambda - \beta\sigma^2\gamma(1-\alpha) = 0$$

é a equação característica associada à equação (3.8).

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\alpha\gamma\sigma \pm \sqrt{\alpha^2\gamma^2\sigma^2 + 4\beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)}}{2} \\
&= \frac{\alpha\gamma\sigma \pm \sqrt{\alpha^2\gamma^2\sigma^2\left(1 + \dfrac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)\right)}}{2} \\
&= \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]
\end{aligned}$$

Portanto, as raízes características da equação são:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]$$

e

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]$$

Observe que λ_1 e λ_2 são raízes reais desde que $1-\alpha > 0$, isto é, $\alpha < 1$. Além disso, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$. Para assegurar a propagação (já que p(n) cresce indefinidamente quando $n \to \infty$) precisamos ter $\lambda_1 > 1$, caso contrário, pela observação 3.1.2 todas as soluções da equação (3.8) convergem para zero. Não faremos o mesmo com λ_2 uma vez que este é negativo e isto nos leva a uma indesejada oscilação no tamanho da população de plantas, pois neste caso, de acordo com a observação 3.1.2 se a equação característica não tem raízes características reais positivas então a solução da equação (3.8) oscila em torno de zero.

Portanto, considerando

$$\lambda_1 > 1,$$

obtemos

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right] > 1$$

ou ainda,

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}} > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

Elevando os dois lados ao quadrado, tem-se que

$$\left(\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}}\right)^2 > \left(1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\right)^2$$

$$\frac{\alpha^2\gamma^2\sigma^2}{4}\left(1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}\right) > 1 - \alpha\gamma\sigma + \frac{\alpha^2\gamma^2\sigma^2}{4}$$

$$\frac{\alpha^2\gamma^2\sigma^2}{4} + \frac{4\alpha^2\gamma^2\sigma^2\beta(1-\alpha)}{4\gamma\alpha^2} > 1 - \alpha\gamma\sigma + \frac{\alpha^2\gamma^2\sigma^2}{4}$$

$$\gamma\sigma^2\beta(1-\alpha) > 1 - \alpha\gamma\sigma$$

$$\alpha\gamma\sigma + \gamma\sigma^2\beta(1-\alpha) > 1$$

$$\gamma\left(\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)\right) > 1$$

e assim,

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{3.9}$$

A condição (3.9) estabelece uma relação entre as constantes α, β, σ e γ para assegurar a propagação de plantas.

Se $\beta = 0$, que é quando não há sementes germinando com dois anos de idade em Maio, então a condição (3.9) torna

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma} \quad ou \quad \gamma\alpha\sigma > 1 \tag{3.10}$$

A condição (3.10) diz que a propagação de plantas acontece se o produto do número de sementes produzidas por planta em Agosto, a fração de um ano de idade da semente que germina em Maio, e a fração de sementes que sobrevivem em dado inverno, excede 1.

O efeito das condições (3.9) e (3.10) no comportamento das soluções da equação (3.8) para assegurar a propagação anual de plantas pode ser melhor visualizado graficamente. A figura 3.1 ilustra o comportamento da solução da equação (3.8), considerando $p(0) = 5$ e $p(1) = 10$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{3}{4}$.

As mesmas condições iniciais, com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{3}{4}$ (figura 3.2).

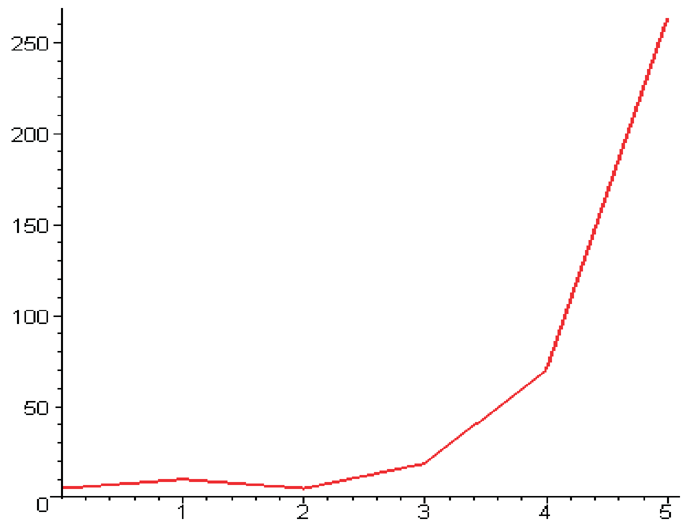

Figura 3.1: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

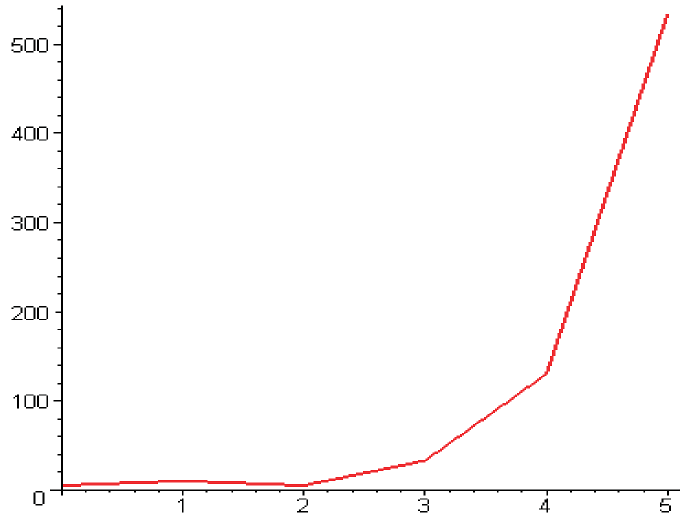

Figura 3.2: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

O comportamento da solução é análogo se considerarmos novas condições iniciais. As figuras 3.3 e 3.4 ilustram este fato, admitindo-se $p(0) = 5$ e $p(1) = 10$.

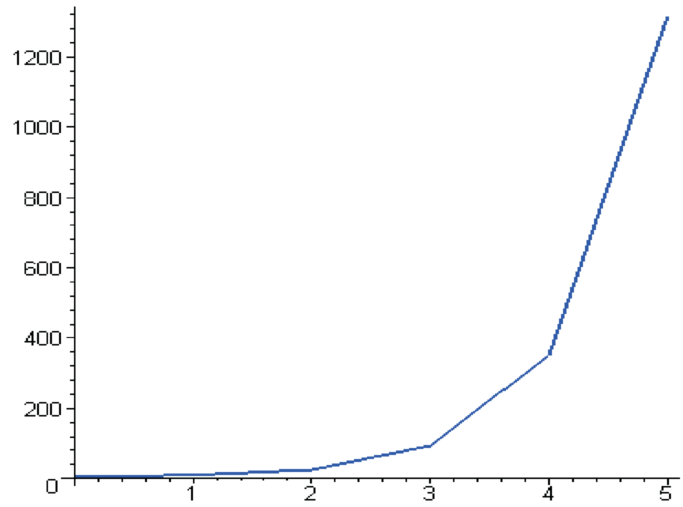

Figura 3.3: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

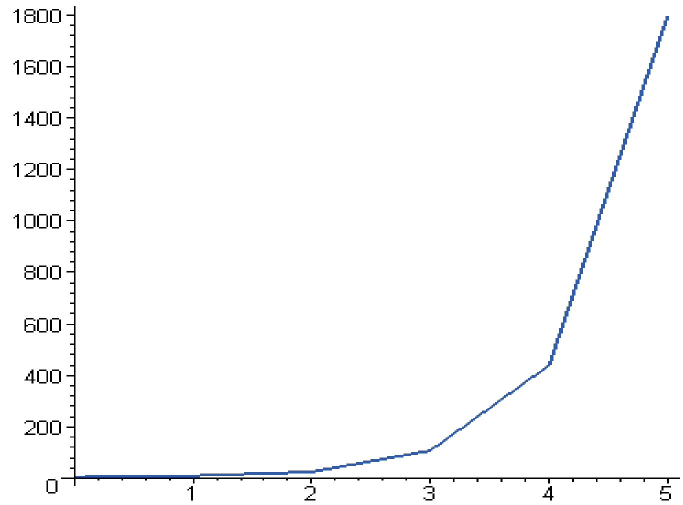

Figura 3.4: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

O mesmo comportamento de $p(n)$ pode ser constatado nas figuras 3.5 e 3.6, onde foram consideradas as seguintes condições iniciais: $p(0) = 100$ e $p(1) = 200$.

Por outro lado, se as condições (3.9) e (3.10) não forem satisfeitas, observamos que as soluções da equação (3.8) tendem a zero. Assim, a propagação anual de plantas não é assegurada. A seguir ilustramos o comportamento das soluções da equação (3.8)

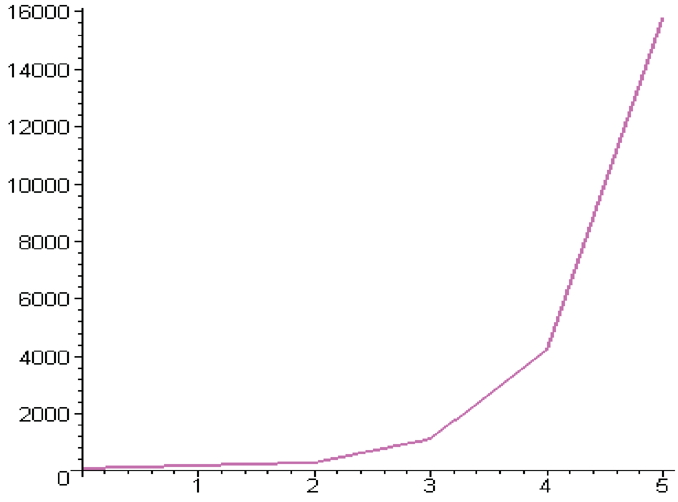

Figura 3.5: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

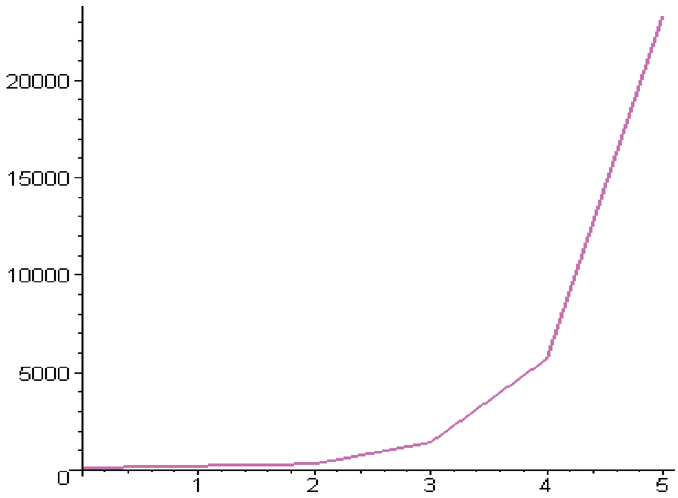

Figura 3.6: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{3}{4}$.

neste caso.

As figuras 3.7 e 3.8 foram obtidas considerando $p(0) = 5$ e $p(1) = 10$ como condições iniciais.

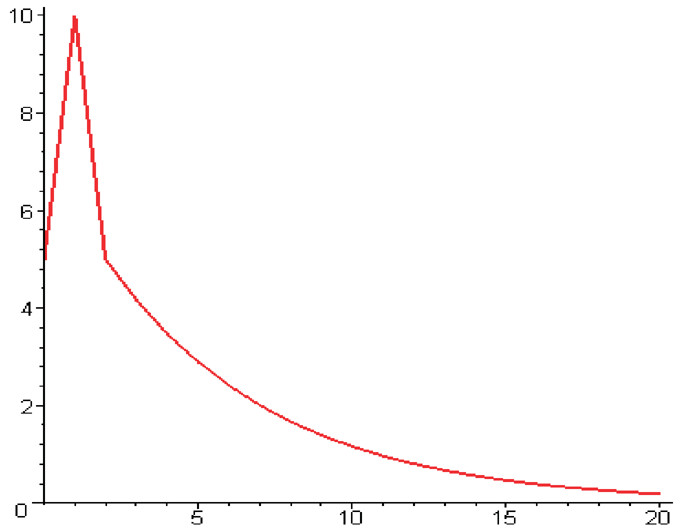

Figura 3.7: A equação (3.8) com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{1}{6}$.

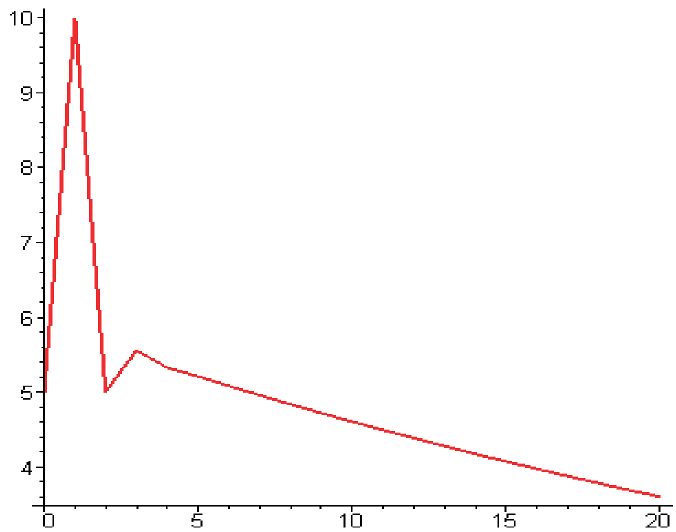

Figura 3.8: A equação (3.8) com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{1}{6}$.

Para as figuras 3.9 e 3.10 foram consideradas $p(0) = 5$ e $p(1) = 10$ como condições iniciais.

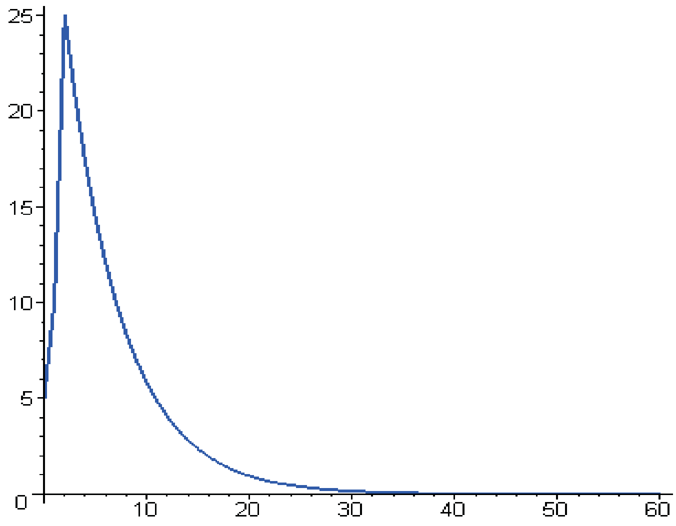

Figura 3.9: A equação (3.8) com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{1}{6}$.

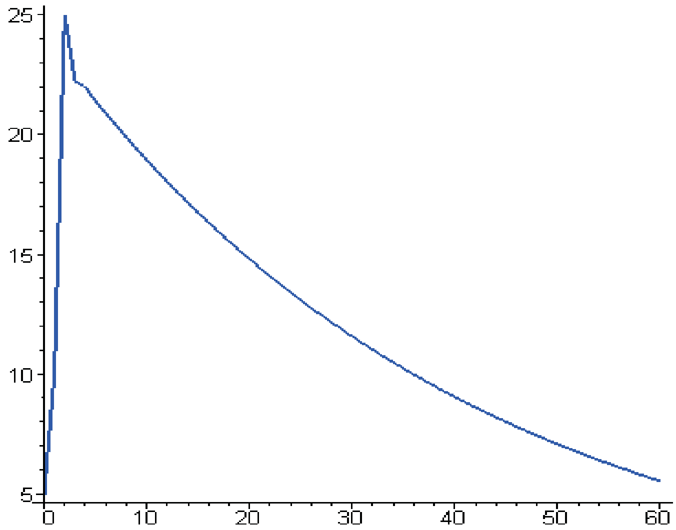

Figura 3.10: A equação (3.8) com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \frac{1}{6}$.

Nas figuras 3.11 e 3.12 admitimos as seguintes condições iniciais: $p(0) = 100$ e $p(1) = 200$.

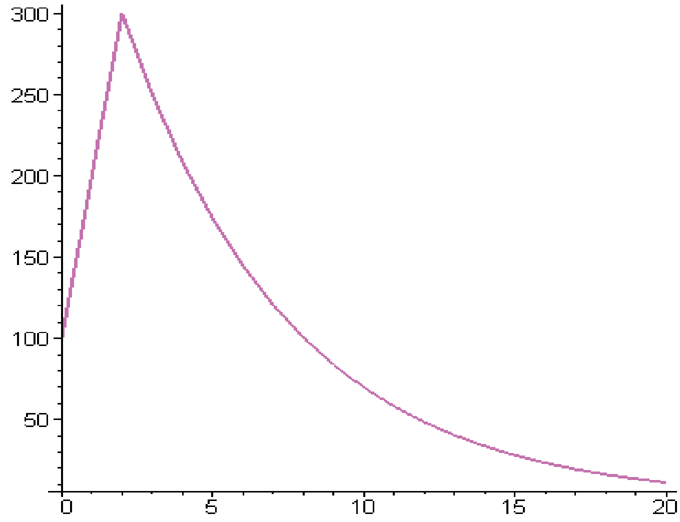

Figura 3.11: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{1}{6}$.

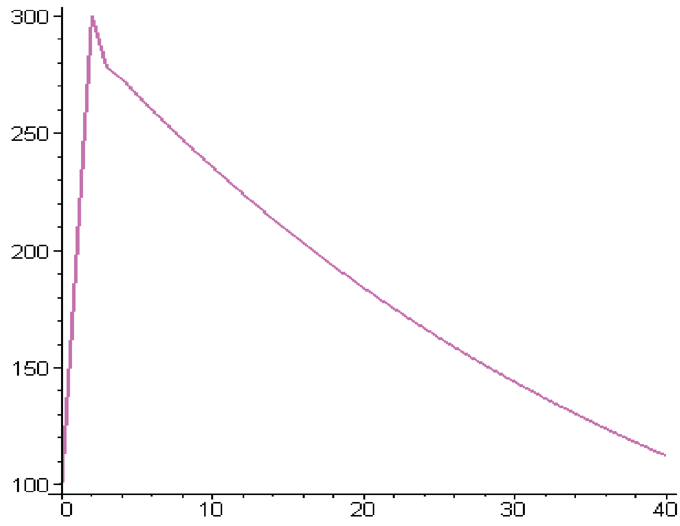

Figura 3.12: A equação (3.8) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = 10$ e $\sigma = \dfrac{1}{6}$.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, R. C. e FERREIRA Jr., W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.

[2] BOYCE, W. E. e DiPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

[3] ELAYDI, S. N. *An introduction to difference equations*. New york: Springer-Verlag, 1996.

[4] GOLDBERG, S. *Introduction to difference equations*. New York: Dover publications, 1986.

[5] LEVY, H. and LESSMAN, F. *Finite Difference Equations*. New York: Dover Publications, 1992.

[6] LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.