

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIAS
CAMPUS DE CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

ESCOAMENTO LAMINAR DE FLUIDOS VISCOSOS:

EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES

**Aluna: Ana Maria Miranda
Orientador: Donald Mark Santee**

Catalão - 2007
Universidade Federal de Goiás
Campus Catalão
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática

**ESCOAMENTO LAMINAR DE FLUIDOS VISCOSOS:
EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES**

Ana Maria Miranda

Orientador: Dr. Donald Mark Santee

Monografia apresentada ao Curso de Matemática do Campus Catalão, da Universidade Federal de Goiás - UFG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Catalão - 2007

**ESCOAMENTO LAMINAR DE FLUIDOS VISCOSOS:
EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES**

ANA MARIA MIRANDA

Monografia apresentada e aprovada em 30 de março de 2007, pela Banca Examinadora constituída pelos professores.

Donald Mark Santee (orientador)
Doutor em Engenharia Civil

Cleves Mesquita Vaz
Mestre em Matemática

Paulo Roberto Bergamaschi
Doutor em Engenharia Mecânica

Dedicatória

A todos que me auxiliaram durante este trabalho

Agradecimento

Aos meus pais, pelo constante incentivo.

Ao Professor Dr. Donald Mark Santee, pela sua confiança em mim depositada desde o início.

Ao Departamento de Matemática pela oportunidade.

Epígrafe

“Uma pequena gota pode ser o início de um rio.”

(Anônimo)

Sumário

<i>Introdução</i>	9
<i>Conceitos básicos</i>	11
Campos escalares e vetoriais.	11
Sistemas e Volumes de Controle	12
Forças de superfície e de campo: tensão	13
Tensão em um ponto: O tensor das tensões.	16
Os fluidos.	18
Viscosidade:	19
A Experiência de Newton:	19
A tensão em um fluido estacionário ou com movimento uniforme.	20
Fluido inviscido em movimento	22
<i>A Representação Matemática dos Fluidos em Movimento</i>	24
Descrição de um campo de escoamento na forma de Lagrange.	25
Descrição de um campo de escoamento na forma de Euler.	26
Tipos de Movimento: Escoamento Laminar e Turbulento.	28
Derivadas Parciais, Totais e Substantivas.	28
<i>As Leis básicas para meios contínuos</i>	31
Suposições Básicas	31
Equação da Conservação da Massa – Forma Diferencial	31
Equação da Conservação da Quantidade de Movimento – Forma Diferencial	33
<i>As Equações de Navier Stokes</i>	34
<i>Bibliografia</i>	39

Resumo

Este trabalho tem por objetivo deduzir as equações que descrevem o movimento de um fluido. Essas equações são conhecidas como equações de Navier-Stokes, e são importantes para a descrição do escoamento laminar tanto de fluidos viscosos como não viscosos e, tanto compressíveis quanto incompressíveis. Para isso, apresenta-se uma descrição dos conceitos, dos princípios físicos e da modelagem matemática que fundamentam a Mecânica dos Fluidos e as suas equações.

Abstract

This work has for goal deduce the equations that describe the action of a fluid. These equations are known as Navier-Stokes' Equations, and they are important for the description of the laminar flow so much of viscous fluid as not viscous and, so much compressible as incompressible. For that, it presents a concepts description, of the physical principles and of the mathematical modeling that base the Mechanics of the Fluid and her equations.

Introdução

O presente trabalho trata da modelagem matemática de um dos mais úteis conjuntos de equações da Mecânica dos Fluidos, que descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesse econômico e acadêmico.

Essas equações intervêm no estudo da turbulência, em meteorologia, em aerodinâmica, nos movimentos das estrelas, projeto de usinas de energia elétrica, análise dos efeitos da poluição, etc. São equações diferenciais parciais de 2ª ordem, conhecidas como Equações de Navier-Stokes. Estabelecidas no século XIX, elas ainda são objeto de numerosos estudos matemáticos para determinar, por exemplo, em que condições a sua solução existe e se é única.

Atualmente consegue-se resolver analiticamente apenas casos particulares destas equações. O desconhecimento de soluções analíticas exatas levou ao desenvolvimento e uso de técnicas de simulação no âmbito da informática.

Até o início deste século, o estudo dos fluidos foi classificado essencialmente em dois grupos, a saber, Hidráulicos e Matemáticos. Os hidráulicos trabalhavam de forma empírica, isto é, pela prática e sem a devida modelagem matemática dos processos básicos envolvidos, enquanto os matemáticos se concentravam na forma analítica.

O grande número de experiências do primeiro grupo forneceu informações de valor inestimável, entretanto, por falta de proveitos generalizados da teoria existente, esses resultados eram restritos e de valor limitado a situações novas.

Os matemáticos por sua vez, devido à não-obtenção das informações experimentais, eram forçados a determinadas simplificações, de forma que seus resultados ficavam freqüentemente à margem da realidade.

Tornou-se claro para alguns pesquisadores eminentes da época que o estudo dos fluidos deve consistir de uma combinação da teoria e da experiência. Este foi o começo da ciência da Mecânica dos Fluidos como se conhece hoje.

Uma formulação completa das equações do movimento de um fluido viscoso tornou-se disponível desde 1845; completa no sentido de que ela incluía forças viscosas,

gravitacionais e de pressão na equação do momento linear. Conhecidas como Equações de Navier-Stokes, elas são em grande parte, contribuições de Navier, Poisson, St.Venant e Stokes durante o período de 1827 a 1845. Estas equações constituem um conjunto de equações de derivadas parciais não lineares.

Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), um grande especialista na construção de estradas e pontes, ficou universalmente conhecido pela primeira dedução das equações de movimento de um fluido em 1822, “Mémoire sur lês lois du mouvement dês fluids”. Apesar de não conhecer o conceito de tensões cisalhantes em um fluido, Navier deduziu as equações para um fluido viscoso baseando suas premissas em modificações das equações de Euler e em considerações sobre as forças de interação entre as moléculas de um fluido.

George Gabriel Stokes (1819-1903), ao terminar sua graduação em 1841, dedicou-se à pesquisa em hidrodinâmica. Em suas investigações, Stokes corretamente deduziu as equações do movimento em um fluido levando em conta seu atrito interno. Outros pesquisadores já haviam obtido resultados semelhantes, notadamente Navier, Poisson e Saint Venant. De qualquer forma, Stokes considerou que seus resultados haviam sido obtidos por meio de hipóteses suficientemente diferentes para justificar a publicação. Portanto, em 1845, o famoso artigo “On the theory of internal friction of fluids in motion“ foi publicado.’

Conceitos básicos

Serão apresentados algumas definições e conceitos básicos referentes à fluidos. Apesar de algumas definições aqui apresentadas serem válidas também para sólidos, a ênfase será na sua utilização na mecânica de fluidos.

Campos escalares e vetoriais.

Grandezas físicas são chamadas de **escalares** quando necessitam apenas da especificação de uma magnitude para completa descrição. São exemplos de grandezas escalares a temperatura e a densidade.

Grandezas físicas são chamadas de **vetoriais** quando necessitam além da magnitude, de uma especificação direcional completa. São empregados vetores com três componentes para a descrição de uma grandeza vetorial. Com frequência um problema pode ser simplificado e reduzido a apenas duas dimensões. Nesse caso, pode-se usar vetores com duas componentes para representar uma grandeza vetorial. São exemplos de grandezas vetoriais a velocidade e a força.

Como surgirão naturalmente mais adiante, alguns conceitos físicos precisam de matrizes para caracterizá-los. Normalmente são matrizes 3×3 e são chamados de **tensores**. São exemplos de tensores a tensão e a deformação de um objeto.

De forma geral, as grandezas físicas (velocidade, temperatura, densidade, etc.) não são uniformes dentro de um objeto, elas podem ser diferentes dependendo da posição em que se localizam no objeto, e podem ainda variar no tempo. Assim, as grandezas físicas são em geral, funções da posição e do tempo.

Uma grandeza física que pode ser função da posição é chamada de **campo**. Um campo pode ser uma distribuição de quantidades escalares, vetoriais ou até tensoriais, normalmente descritas por funções contínuas de coordenadas espaciais e do tempo.

Exemplo 1. Considere que a distribuição da temperatura (campo escalar) em uma placa com 1 m de largura (coordenada x), 1 m de comprimento

(coordenada y) e $0,01$ m de espessura (coordenada z) seja dada pela expressão;

$$T(x,y,z) = 2x + y + 10z \text{ } ^\circ\text{C}$$

Pode-se dizer, então, que a temperatura no canto inferior esquerdo é de $T(0,0,0)=0^\circ\text{C}$. E no canto superior direito é de $T(1,1,1)=3,1^\circ\text{C}$.

Muitas outras grandezas físicas, por exemplo, força, velocidade e aceleração, ocorrem em conjuntos ordenados de três quantidades. Um vetor velocidade é denominado do seguinte modo: $\vec{V} = (u, v, w)$ ou $\vec{V}(x, y, z, t)$

Exemplo: Considere um fluido escoando através de um paralelepípedo de 1 m de largura (direção x), 1 m de altura (direção y) e 2 m de comprimento (direção z), cuja velocidade seja descrita pelo campo vetorial:

$$u(x,y,z) = 0 \text{ m/s}$$

$$v(x,y,z) = 0 \text{ m/s}$$

$$w(x,y,z) = 1 - y \text{ m/s}$$

Logo, a velocidade no fundo ($y=1\text{m}$) é nula $u=0$, $v=0$ e $w=0$. Ao passo que a velocidade na parte superior é $u = 0$, $v = 0$ e $w = 1$ m/s.

Sistemas e Volumes de Controle

Um sistema pode ser considerado uma quantidade fixa de matéria. Todo sistema tem um domínio, que pode ser real ou imaginário. O sistema pode ser fechado, isto é, uma porção constante de massa, pode mudar de forma, posição e condição térmica, mas deve sempre manter a mesma matéria. Alguns autores, de princípio, definem sistema como sendo, necessariamente, o **sistema fechado**.

Podemos escolher como exemplo de um sistema, o vapor em um cilindro de motor (Fig.1), após fechada a válvula de admissão. À medida que o êmbolo se move, o volume do sistema varia, mas não há mudança na quantidade e identidade de massa.

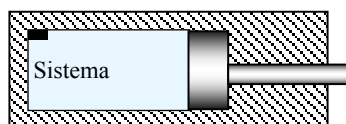


Figura 1 – Sistema fechado

O sistema pode também ser aberto, quando a transferência de massa e energia ocorre através de seus limites. Nesse caso temos o volume de controle, e o contorno desse volume é conhecido como superfície de controle. A quantidade de matéria e identidade da matéria no volume de controle pode variar com o tempo, mas a forma do volume de controle é fixa. Por exemplo, para estudar o escoamento de descarga de um bocal, pode-se escolher, como volume de controle, a parte interna do bocal, como mostra a Fig. 2;

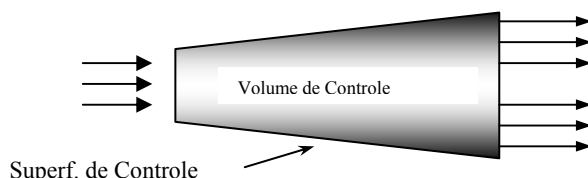


Figura 2 – Volume de Controle

O sistema pode ser também um sistema isolado, quando ele não transfere massa ou energia para o meio externo.

Forças de superfície e de campo: tensão

As forças de campo são todas as forças externas sobre um material especificado, que se desenvolvem sem contato físico. Por exemplo, forças gravitacionais, elétricas ou magnéticas. Nessa monografia serão consideradas somente forças volumétricas gravitacionais. A força gravitacional terrestre (\vec{F}_g) é caracterizada, em cada ponto da superfície do planeta, pela aceleração constante, com sentido orientado para o centro da Terra. Para um volume de controle pequeno, com volume ΔV , tem-se:

$$\vec{\Delta F}_g = \rho \vec{g} \Delta V$$

onde ρ é a massa específica (ou densidade). A densidade de um material homogêneo é definida como sua massa por unidade de volume.

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = \rho \cdot V$$

As forças de superfície são todas as forças exercidas sobre um contorno por meio de sua vizinhança através de contato direto. É, dessa forma, uma ação de contorno ou superficial.

A partir do conceito de força de superfície, é bastante útil, na prática, definir o conceito de tensão. Define-se tensão como sendo a força por unidade de área. Consideremos uma pequena porção finita ΔA da superfície de contorno de um corpo como mostrado na Fig.3. A força ΔF pode ser decomposta em componentes normal e tangencial à área, indicado na Fig. 3 como ΔF_n e ΔF_s , respectivamente. A tensão normal σ_m e a tensão de cisalhamento τ_{ss} em um ponto são definidas pelo seguinte processo-limite:

$$\sigma_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA},$$

$$\tau_{ss} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A} = \frac{dF_s}{dA}.$$

Observa-se que σ_m e τ_{ss} são, na realidade, componentes de força por unidade de área em um ponto do corpo.

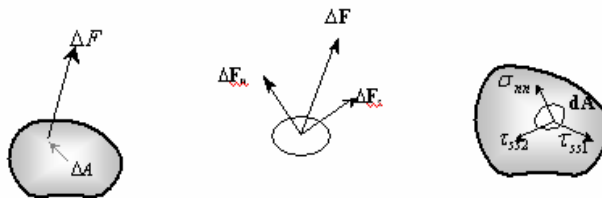


Figura 3 – As componentes de uma força de contato.

Pode-se observar que a tensão depende de dois elementos que tem direção e sentido e, que no interior de um objeto, não existem superfícies bem definidas entre uma força de contato e outra. Logo, é de se esperar que o valor de uma tensão depende não só da

intensidade da força que está sendo aplicada, com também da direção da superfície (real ou imaginária) que se está considerando.

Para estabelecer uma notação conveniente para designar as tensões no interior de um objeto, consideremos um paralelepípedo retangular infinitesimal de fluido. Utilizou-se um esquema de duplo índice para identificar as tensões. O primeiro índice indica a direção da normal ao plano associado com a tensão, enquanto o segundo índice indica a direção da tensão em si.

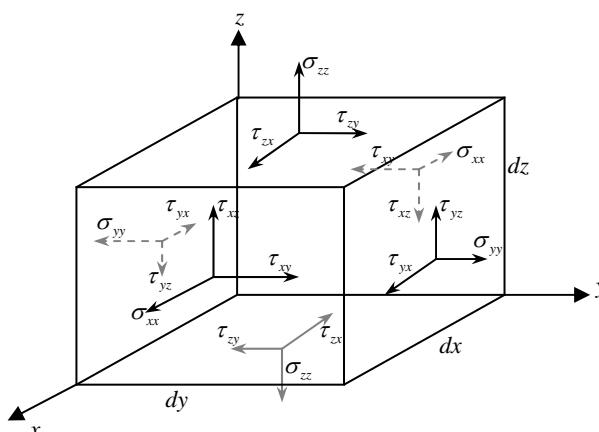


Figura 4 - Paralelepípedo infinitesimal de fluido.

Convenciona-se representar as tensões normais por σ , os quais têm o índice repetido porque a direção da tensão e a normal ao plano de ação da tensão são colineares. E as tensões de cisalhamento por τ , os quais terão os índices misturados.

Por que definimos o conceito de tensão?

Sabemos intuitivamente que forças exercidas sobre o contorno de um meio são transmitidas através do meio. No estudo do contínuo procuramos determinar a maneira pela qual as forças são transmitidas através do meio. É pelo conceito de tensão que nos tornamos aptos a descrever efetivamente tal ação.

Isto significa que, em qualquer interface infinitesimal no meio, temos a tensão normal e um par de tensões de cisalhamento ortogonais.

Conhecendo as tensões em três interfaces infinitesimais ortogonais em um ponto, podemos determinar as tensões sobre quaisquer interfaces infinitesimais no ponto, usando fórmulas de transformação. Se as distribuições destas quantidades são conhecidas através do meio, estamos efetivamente descrevendo a forma pela qual a força está sendo transmitida

através do meio. Assim, podemos ver a utilidade e importância da notação de tensão que apresentamos.

Tensão em um ponto: O tensor das tensões.

Para a obtenção da relação entre a tensão em um ponto, e as componentes de tensão, consideremos corpos livres infinitesimais de forma conveniente, formados por elementos do meio.

Consideremos um tetraedro infinitesimal de fluido, como mostra a Fig.5. Aplicando a lei de Newton do movimento na direção da normal à superfície inclinada do tetraedro, podemos resolver para a tensão σ_{nm} em termo das nove tensões indicadas nos plano de referência.

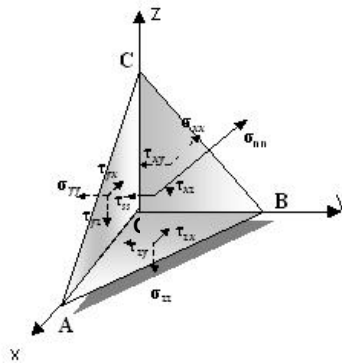


Figura 5 – Gráfico movimento viscoso

Sejam l , m e n os cossenos diretores de σ_{nm} (e conseqüentemente da normal a ABC). Utilizando os cossenos diretores para relacionar as áreas sobre as faces do prisma, temos:

$$\begin{aligned} OCB &= (ABC)l \\ OAC &= (ABC)m \\ OBA &= (ABC)n \end{aligned} \quad (1)$$

Exprimindo a lei de Newton na direção de σ_{nm} teremos:

$$\begin{aligned} \sigma_{nm}ABC - \sigma_{xx}OCBl - \tau_{xy}OCBm - \tau_{xz}OCBn - \sigma_{yy}OACm - \tau_{yz}OACn - \tau_{yx}OACl \\ - \sigma_{zz}OBAn - \tau_{zx}OBAl - \tau_{zy}OBAm = 0 \end{aligned}$$

Substituindo as áreas OCB, OAC e OBA, pelas equações (1) e reordenado os termos teremos:

$$\sigma_{nm} = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + \tau_{xy}lm + \tau_{yx}ml + \tau_{yz}mn + \tau_{zy}mn + \tau_{zx}nl + \tau_{xz}ln \quad (2)$$

Da mesma forma, podemos determinar duas componentes ortogonais da tensão de cisalhamento sobre a superfície inclinada em termos das mesmas nove componentes da tensão.

Como a inclinação da superfície ABC é arbitrária, pode-se verificar que as tensões em todos os planos, isto é, para qualquer conjunto de cossenos diretores, podem ser determinadas em termos das nove componentes nos planos de referência. Assim, quando os efeitos viscosos são significativos, a tensão adquire seu caráter tensorial.

As nove componentes escalares de um tensor das tensões, são usualmente indicadas por uma matriz de ordem 3x3, onde os primeiros índices são comuns para uma dada linha e os seguintes são comuns para uma coluna:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Pré e pós multiplicando a matriz pelos cossenos diretores (l, m, n), que indicam a

$$\text{direção do elemento de área considerado obtem-se: } \begin{pmatrix} l & m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} l\sigma_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} & l\tau_{xy} + m\sigma_{yy} + n\tau_{zy} & l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_{zz} \end{pmatrix}_{1 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}_{3 \times 1} =$$

$$\left(l(l\sigma_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}) + m(l\tau_{xy} + m\sigma_{yy} + n\tau_{zy}) + n(l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_{zz}) \right)$$

$$\sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + \tau_{xy}lm + \tau_{yx}ml + \tau_{yz}mn + \tau_{zy}mn + \tau_{zx}nl + \tau_{xz}ln$$

Note que a equação obtida é a mesma equação obtida do lado direito da equação (2). Note, também, que os cossenos diretores representam a direção do elemento infinitesimal de

área. Portanto a matriz 3x3 dada por (3) representa o estado de tensões do ponto independente da direção que se está considerando. Essa matriz é o **tensor das tensões**.

Os fluidos.

Um fluido é definido como uma substância que muda continuamente de forma enquanto existir uma tensão de cisalhamento, ainda que esta seja pequena. Em contraste, um corpo elástico inicia um deslocamento definido (ou se quebra completamente) quando submetido a uma tensão de cisalhamento. Por exemplo, o bloco sólido mostrado na Fig. 6a, muda de forma de maneira convenientemente caracterizada pelo ângulo $\Delta\alpha$, quando submetido a uma tensão de cisalhamento. Se este fosse um elemento fluido, como mostrado na Fig. 6b, não haveria nenhum $\Delta\alpha$ fixo, mesmo para uma tensão de cisalhamento infinitesimal. Ao contrário, persistirá uma deformação contínua enquanto for aplicada a tensão de cisalhamento.

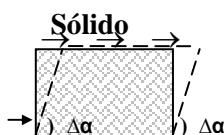


Figura 6a

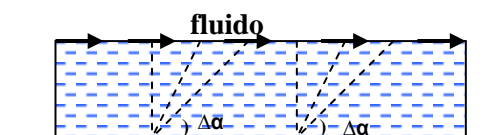


Figura 6b

Nos materiais plásticos, tal como a parafina, ambos tipos de deformação podem aparecer dependendo da magnitude da tensão de cisalhamento. A magnitude desta tensão de cisalhamento depende do tipo de material e de seu estado.

Os fluidos são compostos de moléculas em movimentos constante com ocorrência de colisões. Para ser mais exato na análise, deve-se considerar a ação de cada molécula, ou grupo de moléculas em um escoamento. Na maioria dos cálculos, estamos interessados nas manifestações médias mensuráveis de várias moléculas, por exemplo: densidade, pressão e temperatura. Pode-se considerar que essas manifestações surjam de uma distribuição conveniente de matéria, chamada de contínuo, no lugar do atual aglomerado complexo de moléculas discretas.

Viscosidade:

A viscosidade é uma força volumétrica de atrito interno que aparece no deslizamento de camadas fluindo umas sobre as outras, dando origem a tensões tangenciais de cisalhamento. Com isso, o atrito interno impede ou oferece uma resistência ao escorregamento das partículas, umas sobre as outras.

A Experiência de Newton:

Na experiência realizada por Newton, foram consideradas duas placas paralelas, e um fluido confinado entre elas, (Fig. 7), onde a de cima entra em movimento com uma velocidade U com uma força aplicada F , e a inferior permanece fixa. Suponha que a distância h entre as placas seja suficientemente pequena, de modo que as partículas fluidas se movam em trajetórias paralelas. Foi observado que as partículas fluidas adjacentes a contornos sólidos tendem a aderir à superfície do sólido. Esta mesma propriedade gera um atrito interno, pois as partículas fluidas se arrastam umas sobre as outras produzindo uma tensão de cisalhamento $\tau_{yx} = F/A$ entre camadas fluidas adjacentes.

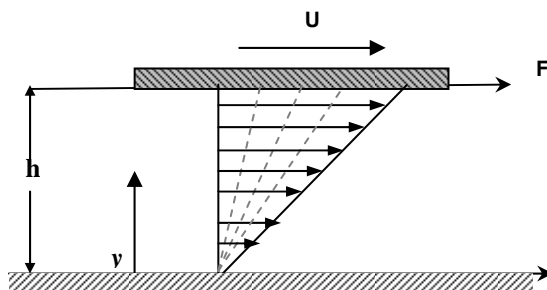


Figura 7- Distribuição de velocidades no movimento de um fluido.

Para um fluido bem ordenado, onde as partículas se movem retilineamente, em linhas paralelas, a lei de Newton diz que para certos fluidos chamados newtonianos, a tensão de cisalhamento numa interface tangente à direção do escoamento é proporcional à razão de variação da velocidade na direção normal à interface. Matematicamente pode-se escrever:

$$\tau_{yx} \propto \frac{\partial V}{\partial n} \quad (4)$$

utiliza-se na expressão a letra n para enfatizar o fato de que a derivada deve ser em relação a uma coordenada normal ao elemento de área onde ocorre a tensão de cisalhamento, e a Fig. 8

pode explicar essa relação: Uma área infinitesimal no escoamento é escolhida, como mostrado. A normal n a esta área é desenhada, e as velocidades do fluido nos pontos desta normal são marcados, formando um perfil de velocidade. A inclinação do perfil em relação ao eixo n na posição correspondente ao elemento de área é o valor de $\frac{\partial V}{\partial n}$, que se relaciona à tensão de cisalhamento τ na interface, segundo a expressão (4).

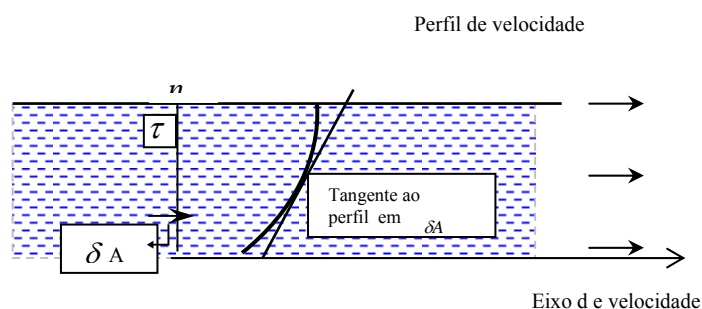


Figura 8 – Perfil de velocidades

A inserção do coeficiente de proporcionalidade na lei de Newton da viscosidade conduz ao resultado: $\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}$, onde μ é chamado coeficiente de viscosidade.

A tensão em um fluido estacionário ou com movimento uniforme.

Um fluido estacionário está completamente livre de tensão de cisalhamento. Um fluido com movimento uniforme, isto é, um fluido em que todos os elementos tem a mesma velocidade, também está livre da tensão de cisalhamento porque a variação de velocidade em todas as direções para o escoamento uniforme deve ser zero ($\partial V / \partial n = 0$) e, dessa forma, em virtude da lei de viscosidade de Newton, todas as tensões de cisalhamento são nulas.

Considere um elemento prismático infinitesimal de fluido, e admitindo que a única força de campo seja decorrente da gravidade, tem-se:

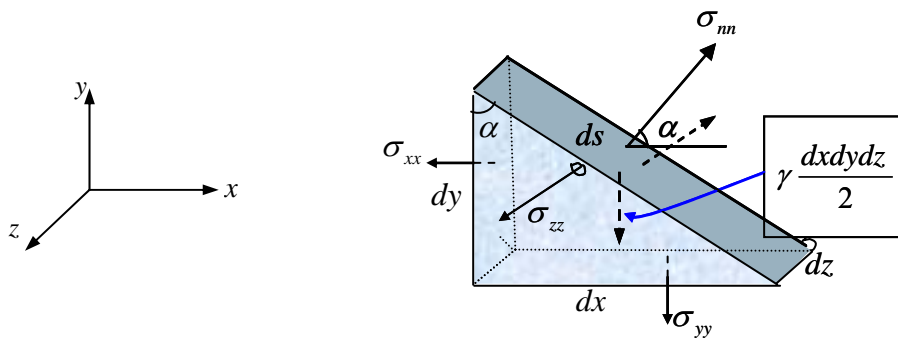


Figura 9 – Elemento de volume. Fluido Estacionário.

Lei de Newton na direção x:

$$-\sigma_{xx} dydz + \sigma_{nn} ds dz \cos \alpha = 0$$

Como $\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$, a equação fica:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{nn}$$

Na direção y, obtem-se com a lei de Newton:

$$-\sigma_{yy} dx dz + \sigma_{nn} dz ds \operatorname{sen} \alpha - \gamma \frac{dx dy dz}{2} = 0$$

De novo, reconhecendo $\operatorname{sen} \alpha$ como $\frac{dx}{ds}$, e dividindo tudo por $dx dz$, obtem-se:

$$-\sigma_{yy} + \sigma_{nn} - \gamma \frac{dy}{2} = 0$$

Agora, fazendo o tamanho do elemento tender a zero, observa-se:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{nn}$$

Logo, conclui-se que, em um fluido estacionário ou com movimento uniforme, a tensão em um ponto é independente da direção, e dessa forma ela pode ser representada por uma única quantidade escalar. Nesse caso a tensão também é chamada de **pressão**. Dessa forma a pressão é tomada como uma medida de força por unidade de área, resultado da manifestação média da colisão de um fluido com as paredes do recipiente que o contém.

Fluido invíscido em movimento

Um fluido com viscosidade teoricamente zero é chamado de fluido invíscido ou sem viscosidade. Alguns escoamentos mostram efeitos viscosos desprezivelmente pequenos. Esta idealização, com suas simplificações resultantes, podem frequentemente ser usadas com boa vantagem.

Considere a Fig. 9, observando que não pode haver tensão de cisalhamento, e que na análise atual podem existir acelerações arbitrárias.

Na direção y , a lei de Newton fornece:

$$-\sigma_{yy} dx dz + \sigma_{nn} ds dz \operatorname{sen} \alpha - \gamma \frac{dx dy dz}{2} = \rho \frac{dx dy dz}{2} a_y$$

onde a_y é a componente de aceleração na direção y . Observe que a força da gravidade e de inércia desaparecem no processo-limite porque ambos os termos são compostos por produtos de três infinitesimais, comparados com dois para os outros dois termos. Após a substituição de $\operatorname{sen} \alpha$ por dx/ds , a equação fica:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{nn}$$

Uma equação análoga, na outra direção leva à conclusão de que:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$$

Logo conclui-se que, para um fluido invíscido em movimento, tal como no caso do fluido estacionário ou com movimento uniforme, a tensão em um ponto pode ser representada também (assim como o fluido estacionário) por uma quantidade escalar.

A Representação Matemática dos Fluidos em Movimento

Os escoamentos são com freqüência representados graficamente com a ajuda de **linhas de corrente**. Uma linha de corrente é uma linha imaginária num campo de escoamento tal que, para um dado instante de tempo, a velocidade em qualquer ponto é obtida pela tangente a esta linha em cada ponto (Fig. 10).

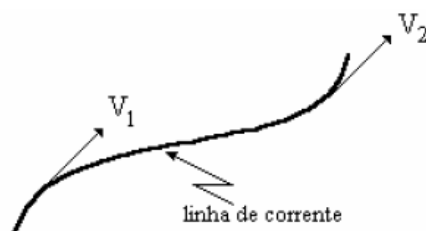


Figura 10 – Definição de Linha de Corrente

As linhas de corrente podem ser identificadas colocando marcas no escoamento e registrando as suas posições em dois instantes diferentes consecutivos. Sendo o deslocamento tangente à velocidade, a união dos pontos dá a direção e sentido da velocidade. O espaço percorrido por unidade de tempo dá o módulo da velocidade.

A equação diferencial para uma linha de corrente em duas dimensões pode ser obtida observando-se que a velocidade (u,v,w) é a derivada em relação ao tempo da posição (x,y,z) , assim a derivada de cada componente do vetor posição dá a respectiva componente do vetor derivada:

$$u = \frac{dx}{dt} \text{ e } v = \frac{dy}{dt}, \text{ eliminando } dt, \text{ temos;}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Este conceito pode ser estendido a um campo tridimensional em coordenadas cartesianas, resultando no conjunto de equações

$$vdx = udy$$

$$wdx = udz$$

$$wdy = vdz$$

Qualquer curva contínua que satisfaça estas equações simultaneamente constitui uma linha de corrente.

Para os cálculos que envolvem o movimento de partículas fluidas que compõe o escoamento, temos dois pontos de vista a considerar:

- Forma ou análise de Lagrange (segue o movimento)
- Forma ou análise de Euler (fixo no espaço)

O método lagrangiano descreve o comportamento de partículas discretas, ou de massas pontuais, quando elas se movem no espaço. O mesmo ponto de vista pode ser usado no estudo dos fenômenos de transporte, porém considere a complexidade da descrição do comportamento de uma partícula de um fluido à medida que ela flui através de uma região no espaço. Não é só difícil segui-la, como também sua forma não pode ser determinada, pois ela pode variar continuamente.

Descrição de um campo de escoamento na forma de Lagrange.

A descrição matemática básica de um escoamento na forma de Lagrange é o **Campo de Deslocamentos**. O campo de deslocamentos expressa a posição (X,Y,Z) que uma partícula que estava inicialmente na posição (x,y,z) se encontra no instante t .

$$\begin{aligned} X &= f(x,y,z,t) \\ Y &= g(x,y,z,t) \\ Z &= h(x,y,z,t) \end{aligned}$$

Exemplo. Suponha que o objeto de forma quadrada sofra um deslocamento dado por:

$$\begin{aligned} X &= x; \\ Y &= 0.5 (1-e^{-t}) y \\ Z &= z \end{aligned}$$

Isso significa que quando $t = 3$, o ponto $(0,0,0)$ encontra-se em $(0,0,0)$, o ponto $(0,1,0)$, encontra-se em $(0,0.47,0)$, o ponto $(1,1,0)$ encontra-se em $(1,0.47,0)$, e o ponto $(1,0,0)$ encontra-se em $(1,0,0)$.

Descrição de um campo de escoamento na forma de Euler.

Na forma de Euler, caracterizar um escoamento consiste basicamente em caracterizar a velocidade em cada ponto de um volume de controle, e em cada instante de tempo. Essa distribuição de velocidades é normalmente designada por “campo de velocidades”, e, conhecido o campo de velocidades, pode-se calcular as outras propriedades do escoamento (fluxos, acelerações e forças, variação de massa volúmica, etc.).

Em um sistema deformável como um fluido, há um número infinito de partículas cujos movimentos devem ser descritos, tornando impossível tal prática. Assim para ajudar a identificação das partículas em um escoamento, emprega-se coordenadas espaciais. A velocidade de todas as partículas de um escoamento pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}u &= f(x, y, z, t), \\v &= g(x, y, z, t), \\w &= h(x, y, z, t).\end{aligned}$$

Este é chamado *método de campo*.

Exemplo: Um campo de escoamento é dado por:

$$\begin{aligned}u &= 2x^2 \\v &= 4xyt \\w &= 0\end{aligned}$$

- a) Qual a velocidade de uma partícula em (1,3,2)?
- b) Desenhe a linha de corrente que passa através do ponto (1,3) quando $t=1$ e quando $t = \frac{1}{2}$.

Solução: a) A velocidade pode ser determinada substituindo-se os valores dados na equação, ou seja,

$$V(1,3,2) = (2, 24, 0)$$

- b) Equação da linha de corrente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{4xyt}{2x^2} = 2 \frac{yt}{x}$$

Como t não depende de x e nem de y podemos separar as variáveis:

$$\int \frac{dy}{y} = 2t \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = 2t \ln x + \ln C$$

$$y = Cx^{2t}$$

Para $t=1$,

$$C = \frac{y}{x^2}$$

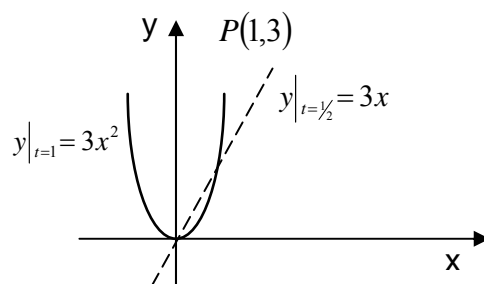
No ponto $(1,3)$:

$$C(1,3,1) = 3 \quad e \quad y|_{t=1} = 3x^2$$

Seguindo o mesmo procedimento para $t = \frac{1}{2}$;

$$C(1,3, \frac{1}{2}) = 3 \quad e \quad y|_{t=\frac{1}{2}} = 3x$$

Gráfico da linha de corrente:



No método euleriano, estipulando coordenadas fixas x_1, y_1, z_1 nas funções do campo de velocidades, é obtida a velocidade das partículas que passam por essa posição em qualquer instante. Matematicamente, pode-se dar a expressão $V(x_1, y_1, z_1, t)$. Dessa forma, é possível obter, numa posição fixa no espaço, as velocidades de uma “corda” contínua de partículas fluidas que passam por essa posição

Tipos de Movimento: Escoamento Laminar e Turbulento.

Em 1883, Osborne Reynolds observou dois tipos distintos de escoamentos, o laminar e turbulento. Foi observado que para velocidades relativamente baixas, as partículas do fluido moviam-se em camadas ou lâminas segundo uma trajetória reta e paralela. A viscosidade do fluido sendo dominante, eliminava qualquer tendência às condições de turbulência, esse tipo de escoamento passou a ser conhecido como escoamento laminar.

No escoamento turbulento, foi observado que as partículas do fluido, diferente do laminar, moviam-se de um modo confuso em todas as direções.

Derivadas Parciais, Totais e Substantivas.

Com o tratamento euleriano, as variações infinitesimais de velocidades devem ser expressas em termos de derivadas parciais, já que cada componente é afetado tanto pelo espaço quanto pelo tempo. De acordo com a definição de diferencial total, a variação infinitesimal de velocidade na direção x de:

$$\begin{aligned}u &= u(x, y, z, t), \\v &= v(x, y, z, t), \\w &= w(x, y, z, t).\end{aligned}$$

fica,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Ou usando a regra da cadeia para a derivação parcial, em três dimensões para um acréscimo de tempo, tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Se consideramos as componentes das derivadas $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ como componentes escalares da velocidade do fluido, eles podem ser substituídos pelos seus respectivos componentes da velocidade:

$$a \equiv \frac{DV}{Dt} = \left(u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial V}{\partial t},$$

onde DV/Dt indica a derivada substancial, substantiva ou derivada seguindo o movimento de V .

Qualquer propriedade de um fluido, como por exemplo, a densidade de massa $\rho = \rho(x, y, z, t)$, pode ser tratada do ponto de vista euleriano usando-se a regra da cadeia.

Para ilustrar, e dar uma noção intuitiva do significado dos três tipos de derivadas citados acima, considere o exemplo a seguir.

Exemplo: Seja C a concentração de peixes em um rio.

Os peixes estão se movendo com $C = C(x, y, z, t)$, isto é, a quantidade de peixes por metro cúbico está variando a cada ponto e a cada instante de tempo.

I- *O que significa a derivada parcial $\frac{\partial C}{\partial t}$?*

Suponha que estamos em uma ponte e observamos como a concentração de peixes logo abaixo muda com o tempo.

Isto é, observamos a velocidade com que a concentração aumenta (ou diminui) numa posição fixa no espaço.

$\frac{\partial C}{\partial t}$ - Derivada parcial de C em relação a t , considerando (x,y,z) constantes.

2- O que significa a derivada total $\frac{dC}{dt}$?

Suponha que pegamos um barco e podemos ir para cima, para baixo e para o lado. A derivada total

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

onde

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ - são as componentes da velocidade do barco.

Indica a velocidade com que a concentração de peixes irá variar, não só com a passagem do tempo, mas com a mudança de posição do barco.

3- O que significa a derivada substancial $\frac{DC}{Dt}$?

Suponha que pegamos uma canoa e flutuamos. Agora a velocidade do observador é igual à velocidade da corrente v . Quando medimos a mudança da concentração de peixes com o tempo, os números dependem da velocidade local da corrente.

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z}$$

onde

u, v, w - são as componentes da velocidade local do fluido v .

As Leis básicas para meios contínuos

Uma análise de qualquer problema em Mecânica dos Fluidos, necessariamente se inicia, quer diretamente ou indiretamente com a definição das leis básicas que governam o movimento do fluido.

- 1- Conservação da matéria (Equação da Continuidade);
- 2- Segunda lei de Newton (Equação da Quantidade de Movimento);
- 3- Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica);
- 4- Segunda lei da termodinâmica.

Além dessas leis gerais, existem numerosas leis subsidiárias, algumas vezes chamadas de relações constitutivas, que se aplicam a tipos específicos de meio.

Suposições Básicas

Antes de entrarmos nos detalhes da equação de Navier-Stokes, é necessário fazer várias suposições à cerca dos fluidos. A primeira é que um fluido é contínuo, ou seja, ele não contém vazios, como por exemplo, bolhas dissolvidas no gás, ou que ele não consista de partículas como da neblina. Outra hipótese necessária é que todas as variáveis de interesse tais como pressão, velocidade, densidade, temperatura, etc., são diferenciáveis.

Como visto anteriormente, as leis básicas são derivadas de princípios de conservação de massa, momento e energia. Para se chegar a essas leis, algumas vezes é necessário considerar um volume arbitrariamente finito, chamado de volume de controle, sobre o qual estes princípios possam ser facilmente aplicados. O volume de controle permanece fixo no espaço ou pode mover-se como o fluido.

Equação da Conservação da Massa – Forma Diferencial

Seja o Paralelepípedo invariável e fixo no espaço (Fig. 11), de arestas dx , dy e dz , e dimensões infinitesimais, com seu interior totalmente ocupado por fluido de densidade transitória ρ

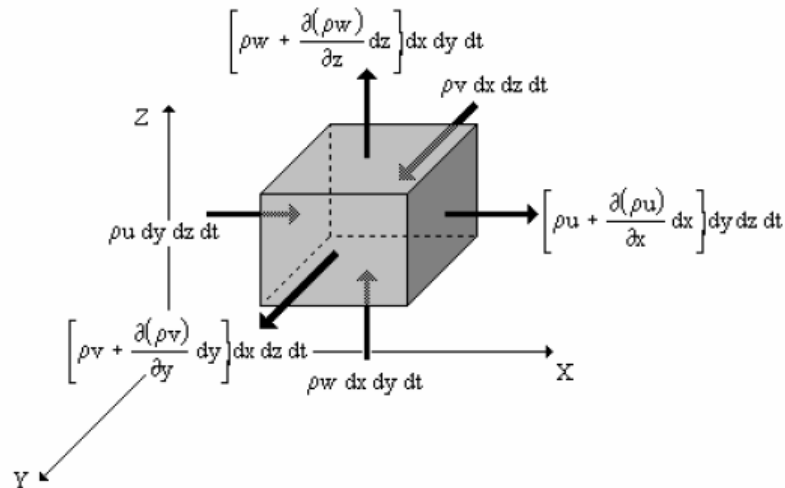


Figura 11- Volume de Controle elementar

Durante um intervalo infinitesimal de tempo dt , a massa específica passa de ρ para $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$. Portanto, a variação de massa do volume do paralelepípedo é :

$$dm = \left(\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \rho \right) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

A massa que entra no volume infinitesimal, durante o intervalo dt é:

$$m_{entra} = \rho (u dy dz + v dx dz + w dx dy) dt$$

E a massa que sai do volume durante o mesmo intervalo é:

$$m_{sai} = \rho (u dy dz + v dx dz + w dx dy) dt + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

Logo, o balanço de massa fornece:

$$dm = m_{entra} - m_{sai} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Esta é a equação diferencial de conservação da massa para um volume de controle infinitesimal (diferencial), também conhecida como *equação da continuidade*, por exigir

apenas que a massa específica e a velocidade sejam funções contínuas, podendo o escoamento ser permanente ou não, viscoso ou não-viscoso e compressível ou incompressível.

Na maioria dos casos, o escoamento é considerado incompressível, ou seja, para qualquer variação de pressão não ocorre variação de seu volume. Assim a variação da densidade é considerada desprezível:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{E portanto: } \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

que é a equação da continuidade na forma diferencial, para escoamentos onde os efeitos de compressibilidade são desprezíveis, considerando u , v e w como as componentes do vetor velocidade nas direções x , y e z , respectivamente.

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento – Forma Diferencial

Estaremos deduzindo a equação da Conservação de Quantidade Movimento diretamente da Segunda Lei de Newton, uma vez que o Sistema e o Volume de Controle coincidem no tratamento infinitesimal (fig.12).

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \Rightarrow \quad (6)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \frac{dm}{dt} \Rightarrow f_s + f_c = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\forall$$

onde o termo $\vec{P} = m\vec{V}$ representa a quantidade de movimento e $\sum \vec{F}_{ext}$ se refere ao somatório das forças de campo f_c e de superfície f_s atuando sobre o volume de controle.

As Equações de Navier Stokes

Para a dedução das equações de Navier-Stokes, deve-se ter à disposição as equações da Quantidade de Movimento contendo as forças viscosas:

A equação do momento Linear para um volume de controle infinitesimal é dada por:

$$\sum f_x = \rho \frac{Du}{Dt}, \quad (7)$$

$$\sum f_y = \rho \frac{Dv}{Dt}, \quad (8)$$

$$\sum f_z = \rho \frac{Dw}{Dt}, \quad (9)$$

Estas equações não impõem restrições sobre as forças f_x , f_y e f_z , logo, aplicam-se tanto para fluidos viscosos quanto para não viscosos.

Consideremos um volume de controle diferencial (Fig. 12), e imagine-o como um pequeno elemento de fluido removido de uma camada limite. As superfícies perpendiculares às direções x e z foram removidas do volume de controle para clarear o desenho das tensões que atuam sobre os el

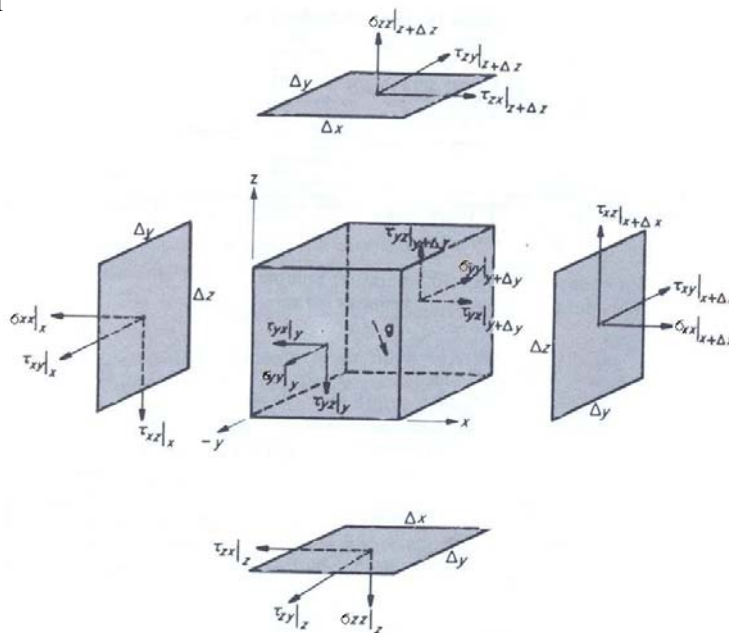


Figura 12 – Volume de controle infinitesimal para um fluido viscoso mostrando as tensões que atuam sobre cada uma das seis faces.

Por simplicidade, calcularemos a força que atua sobre o volume de controle infinitesimal somente na direção x , e a seguir, aplicaremos a Eq. (7) para obter uma das equações de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas. As outras duas restantes são escritas por analogia.

As tensões na direção x dão origem às forças:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x \right) \Delta y \Delta z \\ & \left(\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y \right) \Delta x \Delta z \\ & \left(\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

A força gravitacional na direção x é:

$$\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

Somando as forças de superfície e a força gravitacional, obtemos:

$$\begin{aligned} \Sigma(f_x)_{\text{média}} \Delta x \Delta y \Delta z &= \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z + (\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \Delta z \\ &+ (\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

onde:

$$\Sigma(f_x)_{\text{média}} = \rho g_x + \frac{\sigma_{xx}|_{x+\Delta x} - \sigma_{xx}|_x}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \frac{\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z}{\Delta z}$$

Que no limite, quando Δx , Δy e Δz tendem a zero, fica:

$$\Sigma f_x = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (10)$$

Como estamos calculando as forças na direção x , vamos substituir a equação (10) na equação do momento Linear para um volume de controle infinitesimal (equação 7) na direção x , assim obtemos:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (11)$$

De maneira análoga, as equações do movimento nas direções y e z são;

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (12)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (13)$$

E o problema se reduz à obtenção de relações úteis para a tensão normal e para a tensão de cisalhamento.

De acordo com o teorema de Stokes, as relações gerais entre as tensões normais e a taxa de deformação são:

$$\begin{aligned} \tau_{x,x} &= -p + \lambda \nabla \cdot V + 2\mu \xi_x \\ \tau_{y,y} &= -p + \lambda \nabla \cdot V + 2\mu \xi_y \\ \tau_{z,z} &= -p + \lambda \nabla \cdot V + 2\mu \xi_z \end{aligned} \quad (14)$$

Considerando Fluidos Newtonianos, temos que as tensões viscosas são proporcionais às taxas de deformação do elemento de fluido, logo as relações entre as tensões de cisalhamento e a taxa de deformação são:

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} &= \mu \gamma_{x,y} = \tau_{y,x} \\ \tau_{y,z} &= \mu \gamma_{y,z} = \tau_{z,y} \\ \tau_{z,x} &= \mu \gamma_{z,x} = \tau_{x,z} \end{aligned} \quad (15)$$

Conforme demonstrado por Pai¹ e Schlichting²,. Nestas expressões as deformações normais são:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \text{deformação normal da direção } x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \xi_y &= \text{deformação normal da direção } y = \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (16)$$

¹ Pai, Shih-I: "Viscous Flow Theory," vol.I, "Laminar Flow," Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1956.

² Schlichting, H.: "Boundary Layer Theory," 6th ed., J. Kestin, trans., McGraw-Hill, New York, 1968.

$$\xi_z = \text{deformação normal da direção } z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

e as deformações de cisalhamento são:

$$\gamma_{xy} = \text{deformação de cisalhamento no plano } xy = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \text{deformação de cisalhamento no plano } yz = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (17)$$

$$\gamma_{zx} = \text{deformação de cisalhamento no plano } xz = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

As expressões para as tensões normais contêm o parâmetro λ , algumas vezes denominado segundo coeficiente de viscosidade. Esta não é uma propriedade fluida diretamente mensurável, e o valor numérico atribuído a este termo nas equações de Navier-Stokes é devido à hipótese feita por Stokes, em 1845, que impõe a condição:

$$3\lambda + 2\mu = 0, \text{ ou } \lambda = \frac{-2}{3}\mu \quad (18)$$

Substituindo-se as equações referente a taxa de deformação normal na Eq. (14), temos:

$$\tau_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot V + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

e, substituindo as equações referente a taxa de deformação de cisalhamento, na Eq. (15), temos:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Usando-se estas relações para as tensões normais e tensões de cisalhamento, as equações (11), (12) e (13), fornecem as equações fundamentais do movimento de um fluido viscoso compressível – Equações de Navier-Stokes para um fluido compressível.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

■

Bibliografia

Shames I.H., "Mecânica dos Fluidos", volume I – Princípios Básicos, Ed. Edgar Blucher, 1973.

SISSOM, Leighton E., PITTS, Donald R. – “Fenômenos de transporte”- Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.

<SITE,pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%B5es_de_Navier-Stokes> 18 /05/2007.

SITE,

<www.ana.gov.br/AcoesAdministrativas/CDOC/ProducaoAcademia/Antonio%20Cardoso%20Neto/Elementos_de_Mecanica_dos_Fluidos.pdf> 30/06/2007.