

para $v_1 + W, v_2 + W \in V/W$ e $\alpha \in F$.
 V/W é chamado o *espaço quociente* de V por W .

Definição 2.3: Se U e V são espaços vetoriais sobre F , então a aplicação T de U em V é dita um homomorfismo se:

- 1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
- 2) $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$

Para todos $u_1, u_2 \in U$ e todo $\alpha \in F$.

Definição 2.4: O *núcleo* de T é definido por $\{u \in U \mid T(u) = 0\}$, onde 0 é o elemento neutro da adição em V . Denotaremos núcleo de T por $N(T)$.

Teorema 2.1: Se T é um homomorfismo sobrejetor de U em V com núcleo W , então V é isomorfo a U/W . Reciprocamente, se U é um espaço vetorial e W um subespaço de U , então existe um homomorfismo sobrejetor de U em U/W .

Demonstração: Se considerarmos T um homomorfismo sobrejetor de U em V com núcleo W , então $\Phi : U \rightarrow U/W$, tal que $T(u) = \Phi(u + W)$ é o teorema do isomorfismo para espaços vetoriais, o qual a demonstração é idêntica a demonstração do Teorema do isomorfismo para grupos.

Por outro lado, vamos mostrar que $\Psi : U \rightarrow U/W$.

$\Psi : U \rightarrow U/W$

$u \mapsto u + W$, mostraremos que Ψ é um homomorfismo sobrejetor.

† Ψ é bem definida.

• Queremos mostrar que: $u_1 = u_2 \Rightarrow \Psi(u_1) = \Psi(u_2)$.

$u_1 = u_2 \Leftrightarrow u_1 + u_2^{-1} + W = u_2 + u_2^{-1} + W \Rightarrow u_1 + u_2^{-1} + W = 0 + W \Rightarrow u_1 + W = u_2 + W \Rightarrow \Psi(u_1) = \Psi(u_2)$. Logo, Ψ é bem definida.

† Ψ é um homomorfismo.

• Vamos mostrar que $\Psi(u_1 + u_2) = \Psi(u_1) + \Psi(u_2)$.

$\Psi(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) + W = u_1 + W + u_2 + W = \Psi(u_1) + \Psi(u_2)$.

• Mostraremos que $\Psi(\alpha u_1) = \alpha \Psi(u_1)$.

$\Psi(\alpha u_1) = \alpha u_1 + W = \alpha(u_1 + W) = \alpha \Psi(u_1)$.

† Ψ é sobrejetora.

• Mostraremos que existe $u \in U$ tal que $\Psi(u) = u + W$.

Por definição de grupo quociente, temos que $u + W \in U/W$ para todo $u \in U$.

Portanto existe $u \in U$ tal que $\Psi(u) = u + W$. Logo, Ψ é sobrejetora, e assim o teorema fica demonstrado. ■

Definição 2.5: Sejam V um espaço vetorial sobre F e $v_1, \dots, v_n \in V$, então qualquer elemento da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, onde $\alpha_i \in F$, é chamado *combinação linear* sobre F de v_1, \dots, v_n .

Exemplo 2.3: O vetor $v = (2, -2, 1, 4) \in \mathbb{R}^4$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (3, 3, 1, 2)$ e $v_3 = (0, 0, -1, 0)$, pois para $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$ temos que: $2(1, -1, 0, 2) + 0(3, 3, 1, 2) - 1(0, 0, -1, 0) = (2, -2, 1, 4)$.

Definição 2.6: Se S é um subconjunto não vazio do espaço vetorial V , então $L(S)$, o *fecho-linear* de S , é o conjunto de todas as combinações lineares de conjuntos finitos de elementos de S .

Proposição 2.3: $L(S)$ é um subespaço de V .

Demonstração: Se v e w estão em $L(S)$, então $v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$, $n < \infty$ e

$w = \mu_1 t_1 + \dots + \mu_m t_m$, $m < \infty$, onde os λ_i e os μ_j estão em F e os s_i e t_i estão todos em S .

Assim, para $\alpha, \beta \in F$, $\alpha v + \beta w = \alpha(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n) + \beta(\mu_1 t_1 + \dots + \mu_m t_m)$
 $= (\alpha \lambda_1) s_1 + \dots + (\alpha \lambda_n) s_n + (\beta \mu_1) t_1 + \dots + (\beta \mu_m) t_m$, onde $n + m < \infty$ e, portanto, está novamente em $L(S)$. ■

$L(S)$ é também chamado de espaço vetorial *gerado* por S .

Definição 2.7: O espaço vetorial V é dito *de dimensão finita* se existe um subconjunto finito S de V tal que $V = L(S)$.

Neste caso dizemos que S *gera* $L(S)$.

Notemos que $F^{(n)}$, o espaço vetorial das n -uplas ordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i \in F$ é de dimensão finita sobre F , pois se S consiste dos n vetores de n -uplas $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$, então $F^{(n)} = L(S)$.

De fato:

Se $S = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$, então:

$$L(S) = \{\alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 1); \alpha_i \in F\} = \{(\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n); \alpha_i \in F\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \alpha_i \in F\} = F^{(n)}.$$

Definição 2.8: Seja V um espaço vetorial sobre F . Dizemos que v_1, \dots, v_n em V , são *linearmente dependentes (LD)* sobre F se existem elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ em F , não todos nulos, tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.

Se os vetores v_1, \dots, v_n não são linearmente dependentes, eles são ditos *linearmente independentes (LI)* sobre F .

Observemos que se v_1, \dots, v_n são linearmente independentes, então nenhum deles pode ser o vetor nulo. Por exemplo, se $v_i = 0$, então $0v_1 + \dots + \alpha v_i + \dots + 0v_n = 0$ para todo $\alpha \neq 0$ em F , logo v_1, \dots, v_n serão *LD*.

Em $F^{(3)}$ é fácil verificar que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ são linearmente independentes, ou seja, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$ são tais que:

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Já os vetores $(1, 1, 0), (3, 1, 3)$ e $(5, 3, 3)$ são linearmente dependentes, ou seja, existe $\alpha = \frac{1}{2} \in F$ tal que: $(1, 1, 0) = \frac{1}{2} \cdot [(5, 3, 3) - (3, 1, 3)]$

Salientamos que a dependência linear não depende do espaço considerado, mas também do corpo base. Por exemplo, os elementos $v_1 = 1$ e $v_2 = i$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números reais, isto é, não existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^*$ tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mas são linearmente dependentes sobre o corpo dos números complexos, visto que: $iv_1 + (-1)v_2 = 0$.

Proposição 2.4: Se v_1, \dots, v_n em V são *LI*, então todo elemento em seu fecho-linear possui uma representação única na forma $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, com $\lambda_i \in F$.

Demonstração: Por definição, todo elemento do fecho-linear é da forma $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Para demonstrar a unicidade, precisamos provar que se

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, então $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$. Mas se

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, então certamente temos $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$, o que pela independência linear de v_1, \dots, v_n temos

$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$,

ou seja, $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$. ■

Teorema 2.2: Se v_1, \dots, v_n estão em V , então eles são linearmente independentes ou algum v_k é uma combinação linear dos anteriores v_1, \dots, v_{k-1} .

Demonstração: Se v_1, \dots, v_n são linearmente independentes, então, evidentemente, nada há a demonstrar. Suponhamos, então, que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, onde os α_i não são todos nulos. Seja k o maior inteiro para o qual $\alpha_k \neq 0$. Como $\alpha_i = 0$ para $i > k$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ e $\alpha_k \neq 0$ temos que $v_k = \alpha_k^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{k-1} v_{k-1}) = (-\alpha_k^{-1} \alpha_1) v_1 + \dots + (-\alpha_k^{-1} \alpha_{k-1}) v_{k-1}$. Assim v_k é uma combinação linear de seus anteriores. ■

Corolário 2.2.1: Se v_1, \dots, v_n em V possuem fecho-linear W e se v_1, \dots, v_k são linearmente independentes, então podemos encontrar um subconjunto de v_1, \dots, v_n da forma $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+m}$, com $k + m \leq n$ consistindo de elementos linearmente independentes cujo fecho-linear ainda é W .

Corolário 2.2.2: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita então ele contém um conjunto finito v_1, \dots, v_n de elementos linearmente independentes cujo fecho-linear é V .

Definição 2.9: Um subconjunto S de um espaço vetorial V é denominado uma *base* de V se S consiste de elementos linearmente independentes e $V = L(S)$.

Corolário 2.2.3: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e se u_1, \dots, u_m geram V , então algum subconjunto de $\{u_1, \dots, u_m\}$ forma uma base de V .

Proposição 2.5: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V sobre F e se w_1, \dots, w_m em V são linearmente independentes sobre F , então $m \leq n$.

Demonstração: Todo vetor em V e, em particular, w_m é uma combinação linear de v_1, \dots, v_n . Portanto, os vetores w_m, v_1, \dots, v_n são linearmente dependentes. Além disso, eles geram V , pois v_1, \dots, v_n já o fazem. Assim, algum subconjunto próprio $w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, com $k \leq n - 1$, forma uma base de V . Repetindo o processo com o conjunto $w_{m-1}, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, vemos que pelo Corolário 2.2.1 podemos extrair deste conjunto linearmente dependente uma base da forma $w_{m-1}, w_m, v_{j_1}, \dots, v_{j_s}$, com $s \leq n - 2$. Mantendo esta linha de procedimento, chegamos eventualmente a uma base de V da forma $w_2, \dots, w_{m-1}, w_m, v_\alpha, v_\beta, \dots$; como w_1 não é uma combinação linear de w_2, \dots, w_{m-1}, w_m , a base acima inclui na verdade algum v . Para chegar a esta base introduzimos $m - 1$ vetores de w_1, \dots, w_m , cada introdução tendo nos custado pelo menos um v , e ainda assim resta pelo menos um v . Assim $m - 1 \leq n - 1$ e então $m \leq n$. ■

Corolário 2.5.1: Se V é de dimensão finita sobre F , então duas bases quaisquer de V possuem o mesmo número de elementos.

Demonstração: Seja v_1, \dots, v_n uma base de V sobre F e seja w_1, \dots, w_m uma outra base. Em particular, w_1, \dots, w_m são linearmente independentes sobre F , portanto, pela Proposição 2.5. $m \leq n$. Por outro lado, invertendo os papéis dos v_i e w_j , obtendo $n \leq m$. Estas desigualdades nos dizem que $n = m$. ■

Corolário 2.5.2: $F^{(n)}$ é isomorfo a $F^{(m)}$ se, e somente se, $n = m$.

Demonstração: $F^{(n)}$ possui como uma base o conjunto dos n vetores $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$. Analogamente $F^{(m)}$ possui uma base que contém m vetores. Um isomorfismo leva uma base sobre uma base (Ver apêndice), donde, pelo Corolário 2.5.1, $m = n$. ■

Corolário 2.5.3: Se V é de dimensão finita sobre F , então V é isomorfo a $F^{(n)}$ para um único inteiro n ; na realidade, n é o número de elementos de qualquer base de V sobre F .

Definição 2.10: O inteiro n , no Corolário 2.5.3, é denominado a *dimensão* de V sobre F .

Corolário 2.5.4: Dois espaços vetoriais quaisquer de dimensão finita sobre F , de mesma dimensão, são isomorfos.

Demonstração: Se esta dimensão é n então cada espaço é isomorfo a $F^{(n)}$, logo eles são isomorfos entre si. ■

Proposição 2.6: Se V é de dimensão finita sobre F se $u_1, \dots, u_m \in V$ são linearmente independentes, então ou eles formam uma base de V ou podemos encontrar vetores u_{m+1}, \dots, u_{m+r} em V tais que $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+r}\}$ seja uma base de V .

Demonstração: Como V é de dimensão finita ele possui uma base; seja v_1, \dots, v_n uma base de V . Pelo Corolário 2.2.1, existe um subconjunto da forma $u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ que consiste de vetores linearmente independentes que geram V . Para terminar a demonstração, basta colocar $u_{m+1} = v_{i_1}, \dots, u_{m+r} = v_{i_r}$. ■