Capítulo 2

ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capítulo estabeleceremos importantes resultados para o desenvolvimento das teorias nos capítulos seguintes.

Definição 2.1: Um conjunto não vazio V é dito um *espaço vetorial* sobre um corpo F se V é um grupo abeliano com relação a uma operação que indicaremos por +, e se para todo $\alpha \in F$ e $v \in V$ está definido um elemento, indicado por αv, em V, tal que:

1) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
3) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$;
4) $1 \cdot v = v$;

para todos $\alpha, \beta \in F$, $v, w \in V$ (onde 1 representa o elemento unidade de F com relação à multiplicação).

Exemplo 2.1: Seja $F[x^n] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, a_i \in \mathrm{R}\}$. Afirmamos que $F[x^n]$ é um espaço vetorial sobre R.

De fato:

Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x) \in F[x^n]$.

$F[x^n]$ é fechado, pois

$p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n)$
$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n] = (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n) \in F[x^n]$.

i) $p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b$ $+ \ldots + (a_n + b_n)x^n] = [(b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + \ldots + (b_n + a_n)x^n] = (b_0 + b_1x + \ldots + b_n$ $+ (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = p_2(x) + p_1(x)$.

Logo, a soma é comutativa em $F[x^n]$.

ii) $[p_1(x) + p_2(x)] + p_3(x) = [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n] + (c_0 + c_1x + \ldots + c$ $= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n] + (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n) = [(a_0 + b_0) +$ $+ [(a_1 + b_1) + c_1]x + \ldots + [(a_n + b_n) + c_n]x^n = [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x +$ $[a_n + (b_n + c_n)]x^n = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \ldots + (b_n + c_n$ $= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + [(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n) + (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n)] = p_1(x) + [p$ $+ p_3(x)]$.

Logo, a soma é associativa em $F[x^n]$.

iii) Existe $p_0(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^n \in F[x^n]$ tal que

$p_1(x) + p_0(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$
$+ (0 + 0x + \ldots + 0x^n) = (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + \ldots + (a_n + 0)x^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = p_1($

para todo $p_1(x) \in F[x^n]$.

Logo, $p_0(x)$ é o elemento neutro da soma em $F[x^n]$.

iv) Existe $p_2(x) = -a_0 - a_1x - \ldots - a_nx^n \in F[x^n]$, tal que $p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$
$+ (-a_0 - a_1x - \ldots - a_nx^n) = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x + \ldots + (a_n - a_n)x^n = 0 + 0x + \ldots + 0x$
$= p_0(x)$.

Logo, $p_2(x)$ é o elemento oposto de $p_1(x)$ em $F[x^n]$.

Portanto, $(F[x^n], +)$ é um grupo abeliano.

Ainda temos:
1) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p_1(x),\ p_2(x) \in F[x^n]$, temos que:
$\alpha \cdot [p_1(x) + p_2(x)] = \alpha \cdot [(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n)] = \alpha \cdot [(a_0 +$
$+ (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n] = \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1)x + \ldots + \alpha(a_n + b_n)x^n = (\alpha a_0 + \alpha b$
$+ (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + \ldots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \ldots + \alpha a_nx^n) + (\alpha b_0 + \alpha b_1x + \ldots + \alpha b_n$
$= \alpha p_1(x) + \alpha p_2(x)$.

2) Dados $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $p_1(x) \in F[x^n]$, temos que:
$(\alpha + \beta) \cdot p_1(x) = (\alpha + \beta) \cdot (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \ldots + \alpha a_nx^n) + (\beta a_0 + \beta a$
$+ \ldots + \beta a_nx^n) = \alpha p_1(x) + \beta p_1(x)$.

3) Dados $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $p_1(x) \in F[x^n]$, temos que:
$\alpha(\beta p_1(x)) = \alpha[\beta(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)] = \alpha[\beta a_0 + \beta a_1x + \ldots + \beta a_nx^n] = \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1x +$
$\alpha\beta a_nx^n = (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1x + \ldots + (\alpha\beta)a_nx^n = (\alpha\beta)p_1(x)$.

4) Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que para
todo $p_1(x) \in F[x^n]$, $1 \cdot p_1(x) = 1 \cdot (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$
$= 1 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1x + \ldots + 1 \cdot a_nx^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = p_1(x)$.

Assim de $i),\ ii),\ iii),\ iv),\ 1),\ 2),\ 3)$ e $4)$, temos que $F[x^n]$ é um espaço vetorial.

Definição 2.2: Se V é um espaço vetorial sobre F e se $W \subset V$, então W é um *subespaço* de V se, com relação às operações de V, W forma um espaço vetorial sobre F. Equivalentemente, W é um *subespaço* de V se, e somente se, dados $w_1, w_2 \in W$, e $\alpha, \beta \in F$ implicar que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.

Exemplo 2.2: O subconjunto $F[x^3]$ dos polinômios da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, é um subespaço vetorial de $F[x^n]$, o conjunto dos polinômios da forma $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ com $a_i \in \mathbb{R}$.
Sejam $w_1 = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$, $w_2 = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$ polinômios de $F[x^3]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha(a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1) + \beta(a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x +$
$= (\alpha a_1x^3 + \alpha b_1x^2 + \alpha c_1x + \alpha d_1) + (\beta a_2x^3 + \beta b_2x^2 + \beta c_2x + \beta d_2) = (\alpha a_1 +$
$+ (\alpha b_1 + \beta b_2)x^2 + (\alpha c_1 + \beta c_2)x + (\alpha d_1 + \beta d_2) = \gamma_1x^3 + \gamma_2x^2 + \gamma_3x + \gamma_4 \in$
$\gamma_1 = (\alpha a_1 + \beta a_2)$, $\gamma_2 = (\alpha b_1 + \beta b_2)$, $\gamma_3 = (\alpha c_1 + \beta c_2)$, $\gamma_4 = (\alpha d_1 + \beta d_2)$.

Proposição 2.1: Se V é um espaço vetorial sobre F, então:
1) $\alpha 0 = 0$ *para* $\alpha \in F$; $(0$ *de* $V)$;
2) $ov = 0$ *para* $v \in V$; $(o$ *de* $F)$;
3) $(-\alpha)v = -(\alpha v)$ *para* $\alpha \in F,\ v \in V$;
4) Se $v \neq 0$, então $\alpha v = 0$ implica que $\alpha = o$.
Demonstração:
1) Como $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$. Então,
$\alpha 0 = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow \alpha 0 - \alpha 0 = \alpha 0 + \alpha 0 - \alpha 0 \Rightarrow 0 = \alpha 0$.
2) Como $ov = (o + o)v = ov + ov$, obtemos $ov = 0$.
3) Como $0 = (\alpha + (-\alpha))v = \alpha v + (-\alpha)v$, $(-\alpha)v = -(\alpha v)$.
4) Suponhamos, por absurdo, que $\alpha v = 0$, com $\alpha \neq o$, então,

$0 = \alpha^{-1}0 = \alpha^{-1}(\alpha v) = (\alpha^{-1}\alpha)v = 1v = v.$ ■

Seja V um espaço vetorial sobre F e seja W um subespaço de V, iremos estabelecer condições para que possamos construir o espaço vetorial V/W. Como V e W são grupos abelianos teremos, imediatamente, a construção de V/W grupo abeliano.

Sejam $v_1 + W$ e $v_2 + W \in V/W$ e $\alpha \in F$. Definimos a soma e o produto por escalar como sendo:

$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W.$

$\alpha(v_1 + W) = \alpha v_1 + W.$

Desta forma, primeiramente, precisamos mostrar que este produto está bem definido, isto é, se $v + W = v' + W$, então $\alpha(v + W) = \alpha(v' + W)$.

Como $v + W = v' + W$, $v - v' \in W$. e W é um subespaço, $\alpha(v - v') \in W$. Pela Proposição 5 (ver Apêndice), temos que $\alpha(v - v') = \alpha v - \alpha v' \in W$ e, então; $\alpha v + W = \alpha v' + W$. Portanto,

$\alpha(v + W) = \alpha v + W = \alpha v' + W = \alpha(v' + W)$. Logo, este produto é bem definido.

A verificação dos axiomas de espaço vetorial para V/W é imediato, donde temos a seguinte

Proposição 2.2: Se V é um Espaço vetorial sobre F e W é subespaço de V, então V/W é um espaço vetorial sobre F, munido das seguintes operações:

1) $(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$;

2) $\alpha(v_1 + W) = \alpha v_1 + W$;

para $v_1 + W,\ v_2 + W \in V/W$ *e* $\alpha \in F$.

V/W é chamado o *espaço quociente* de V por W.

Definição 2.3: Se U e V são espaços vetoriais sobre F, então a aplicação T de U em V é dita um homomorfismo se:

1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

2) $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$

Para todos $u_1, u_2 \in U$ e todo $\alpha \in F$.

Definição 2.4: O *núcleo* de T é definido por $\{u \in U \mid T(u) = 0\}$, onde 0 é o elemento neutro da adição em V. Denotaremos núcleo de T por $N(T)$.

Teorema 2.1: Se T é um homomorfismo sobrejetor de U em V com núcleo W, então V é isomorfo a U/W. Reciprocamente, se U é um espaço vetorial e W um subespaço de U, então existe um homomorfismo sobrejetor de U em U/W.

Demonstração: Se considerarmos T um homomorfismo sobrejetor de U em V com núcleo W, então $\Phi : V \to U/W$, tal que $T(u) = \Phi(u + W)$ é o teorema do isomorfismo para espaços vetoriais, o qual a demonstração é idêntica a demonstração do Teorema do isomorfismo para grupos.

Por outro lado, vamos mostrar que $\Psi : U \to U/W$.

$\Psi : U \to U/W$

$u \mapsto u + W$, mostraremos que Ψ é um homomorfismo sobrejetor.

$\vdash$ Ψ é bem definida.

• Queremos mostrar que: $u_1 = u_2 \Rightarrow \Psi(u_1) = \Psi(u_2)$.

$u_1 = u_2 \iff u_1 + u_2^{-1} + W = u_2 + u_2^{-1} + W \Rightarrow u_1 + u_2^{-1} + W = 0 + W \Rightarrow u_1 + W = u_2 +$

$\Rightarrow \Psi(u_1) = \Psi(u_2)$. Logo, Ψ é bem definida.

$\vdash$ Ψ é um homomorfismo.

• Vamos mostrar que $\Psi(u_1 + u_2) = \Psi(u_1) + \Psi(u_2)$.

$\Psi(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) + W = u_1 + W + u_2 + W = \Psi(u_1) + \Psi(u_2)$.

- Mostraremos que $\Psi(\alpha u_1) = \alpha\Psi(u_1)$.

$\Psi(\alpha u_1) = \alpha u_1 + W = \alpha(u_1 + W) = \alpha\Psi(u_1)$.

$\vdash$ Ψ é sobrejetora.

- Mostraremos que existe $u \in U$ tal que $\Psi(u) = u + W$.

Por definição de grupo quociente, temos que $u + W \in U/W$ para todo $u \in U$. Portanto existe $u \in U$ tal que $\Psi(u) = u + W$. Logo, Ψ é sobrejetora, e assim o teorema fica demonstrado. ■

Definição 2.5: Sejam V um espaço vetorial sobre F e $v_1,\ldots,v_n \in V$, então qualquer elemento da forma $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n$, onde $\alpha_i \in F$, é chamado *combinação linear* sobre F de $v_1,\ldots,v_n$.

Exemplo 2.3: O vetor $v = (2,-2,1,4) \in \mathbb{R}^4$ é uma combinação linear de $v_1 = (1,-1,0,2)$, $v_2 = (3,3,1,2)$ e $v_3 = (0,0,-1,0)$, pois para $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$ temos que: $2(1,-1,0,2) + 0(3,3,1,2) - 1(0,0,-1,0) = (2,-2,1,4)$.

Definição 2.6: Se S é um subconjunto não vazio do espaço vetorial V, então $L(S)$, o *fecho-linear de S*, é o conjunto de todas as combinações lineares de conjuntos finitos de elementos de S.

Proposição 2.3: $L(S)$ é um subespaço de V.

Demonstração: Se v e w estão em $L(S)$, então $v = \lambda_1s_1 + \ldots + \lambda_ns_n$, $n < \infty$ e $w = \mu_1t_1 + \ldots + \mu_mt_m$, $m < \infty$, onde os λ_i *e os* μ_j estão em F e os s_i e t_i estão todos em S.

Assim, para $\alpha,\ \beta \in F, \alpha v + \beta w = \alpha(\lambda_1s_1 + \ldots + \lambda_ns_n) + \beta(\mu_1t_1 + \ldots + \mu_mt_m)$
$= (\alpha\lambda_1)s_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n)s_n + (\beta\mu_1)t_1 + \ldots + (\beta\mu_m)t_m$, onde $n + m < \infty$ e, portanto, está novamente em $L(S)$. ■

$L(S)$ é também chamado de espaço vetorial *gerado* por S.

Definição 2.7: O espaço vetorial V é dito *de dimensão finita* se existe um subconjunto finito S de V tal que $V = L(S)$.

Neste caso dizemos que *S gera* $L(S)$.

Notemos que $F^{(n)}$, o espaço vetorial das n-uplas ordenadas $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, onde $\alpha_i \in F$ é de dimensão finita sobre F, pois se S consiste dos n vetores de n-uplas $(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)$, então $F^{(n)} = L(S)$.

De fato:

Se $S = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$, então:

$L(S) = \{\alpha_1(1,0,\ldots,0) + \alpha_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + \alpha_n(0,0,\ldots,1);\ \alpha_i \in F\} = \{(\alpha_1,0,..$
$+(0,\alpha_2,0,\ldots,0) + \ldots + (0,0,\ldots,\alpha_n); \alpha_i \in F\} = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n); \alpha_i \in F\} = F^{(n)}$.

Definição 2.8: Seja V é um espaço vetorial sobre F. Dizemos que $v_1,\ldots,v_n$ em V, são *linearmente dependentes* (LD) sobre F se existem elementos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ em F, não todos nulos, tais que $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_nv_n = 0$.

Se os vetores $v_1,\ldots,v_n$ não são linearmente dependentes, eles são ditos *linearmente independentes* (LI) sobre F.

Observemos que se $v_1,\ldots,v_n$ são linearmente independentes, então nenhum deles pode ser o vetor nulo. Por exemplo, se $v_i = 0$, então $0v_1 + \ldots + \alpha v_i + \ldots + 0v_n = 0$ para todo $\alpha \neq 0$ em F, logo $v_1,\ldots,v_n$ serão LD.

Em $F^{(3)}$ é fácil verificar que $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ são linearmente independentes, ou seja, se $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in F^{(3)}$ são tais que:

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}$$

Já os vetores $(1,1,0),(3,1,3)$ e $(5,3,3)$ são linearmente dependentes, ou seja, existe $\alpha = \frac{1}{2} \in F$ tal que:

$(1,1,0) = \frac{1}{2} \cdot [(5,3,3) - (3,1,3)]$

Salientamos que a dependência linear é função não apenas dos vetores mas também do corpo. Por exemplo, os elementos $v_1 = 1 + 0 \cdot i$, $v_2 = 0 + i$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números reais, isto é, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot i = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

mas são linearmente dependentes sobre o corpo dos números complexos, visto que: $iv_1 + (-1)v_2 = 0$.

Proposição 2.4: Se $v_1, \ldots, v_n$ em V são LI, então todo elemento em seu fecho-linear possui uma representação única na forma $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, com $\lambda_i \in F$.

Demonstração: Por definição, todo elemento do fecho-linear é da forma $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Para demostrar a unicidade, precisamos provar que se $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$, então $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. Mas se $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$, então certamente temos $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$, o que pela independência linear de $v_1, \ldots, v_n$ temos $\lambda_1 - \mu_1 = 0$, $\lambda_2 - \mu_2 = 0, \ldots, \lambda_n - \mu_n = 0$,

ou seja, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. ■

Teoema 2.2: Se $v_1, \ldots, v_n$ estão em V, então eles são linearmente independentes ou algum v_k é uma combinação linear dos anteriores $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Demonstração: Se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, então, evidentemente, nada há a demonstrar. Suponhamos, então, que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, onde os α_i não são todos nulos. Seja k o maior inteiro para o qual $\alpha_k \neq 0$. Como $\alpha_i = 0$ para $i > k$, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$ e $\alpha_k \neq 0$ temos que $v_k = \alpha_k^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_{k-1} v_{k-1}) = (-\alpha_k^{-1}\alpha_1)v_1 + \ldots + (-\alpha_k^{-1}\alpha_{k-1})v_{k-1}$. Assim v_k é uma combinação linear de seus anteriores. ■

Corolário 2.2.1: Se $v_1, \ldots, v_n$ em V possuem fecho-linear W e se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes, então podemos encontrar um subconjunto de $v_1, \ldots, v_n$ da forma $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$, com $k + m \leq n$ consistindo de elementos linearmente independentes cujo fecho-linear ainda é W.

Corolário 2.2.2: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita então ele contém um conjunto finito $v_1, \ldots, v_n$ de elementos linearmente independentes cujo fecho-linear é V.

Definição 2.9: Um subconjunto S de um espaço vetorial V é denominado uma *base* de V se S consiste de elementos linearmente independentes e $V = L(S)$.

Corolário 2.9.1: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e se $u_1, \ldots, u_m$ geram V, então algum subconjunto de $\{u_1, \ldots, u_m\}$ forma uma base de V.

Proposição 2.5: Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V sobre F e se $w_1, \ldots, w_m$ em V são linearmente independentes sobre F, então $m \leq n$.

Demonstração: Todo vetor em V e, em particular, w_m é uma combinação linear de

$v_1, \ldots, v_n$. Portanto, os vetores $w_m, v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Além disso, eles geram V, pois $v_1, \ldots, v_n$ já o fazem. Assim, algum subconjunto próprio $w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, com $k \leq n-1$, forma uma base de V. Repetindo o processo com o conjunto $w_{m-1}, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, vemos que pelo Corolário 1 podemos extrair deste conjunto linearmente dependente uma base da forma $w_{m-1}, w_m, v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}$, com $s \leq n-2$. Mantendo esta linha de procedimento, chegamos eventualmente a uma base de V da forma $w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m$, $v_\alpha, v_\beta \ldots$; como w_1 não é uma combinação linear de $w_2, \ldots, w_{m-1}, w_m$, a base acima inclui na verdade algum v. Para chegar a esta base introduzimos $m-1$ vetores de $w_1, \ldots, w_m$, cada introdução tendo nos custado pelo menos um v, e ainda assim resta pelo menos um v. Assim $m-1 \leq n-1$ e então $m \leq n$. ■

Corolário 2.5.1: Se V é de dimensão finita sobre F, então duas bases quaisquer de V possuem o mesmo número de elementos.

Demonstração: Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V sobre F e seja $w_1, \ldots w_m$ uma outra base. Em particular, $w_1, \ldots, w_m$ são linearmente independentes sobre F, portanto, pela Proposição 2.5. $m \leq n$. Por outro lado, invertendo os papéis dos v_i e w_j, obtendo $n \leq m$. Estas desigualdades nos dizem que $n = m$. ■

Corolário 2.5.2: $F^{(n)}$ é isomorfo a $F^{(m)}$ se, e somente se, $n = m$.

Demonstração: $F^{(n)}$ possui como uma base o conjunto dos n vetores $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. Analogamente $F^{(m)}$ possui uma base que contém m vetores. Um isomorfismo leva uma base sobre uma base (Ver apêndice), donde, pelo Corolário 4, $m = n$. ■

Corolário 2.5.3: Se V é de dimensão finita sobre F, então V é isomorfo a $F^{(n)}$ para um único inteiro n; na realidade, n é o número de elementos de qualquer base de V sobre F.

Definição 2.10: O inteiro n, no Corolário 6, é denominado a *dimensão* de V sobre F.

Corolário 2.10.1: Dois espaços vetoriais quaisquer de dimensão finita sobre F, de mesma dimensão, são isomorfos.

Demonstração: Se esta dimensão é n então cada espaço é isomorfo a $F^{(n)}$, logo eles são isomorfos entre si. ■

Proposição 2.6: Se V é de dimensão finita sobre F se $u_1, \ldots, u_m \in V$ são linearmente independentes, então ou eles formam uma base de V ou podemos encontrar vetores $u_{m+1}, \ldots, u_{m+r}$ em V tais que $\{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+r}\}$ seja uma base de V.

Demonstração: Como V é de dimensão finita ele possui uma base; seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V. Pelo Corolário 1, existe um subconjunto da forma $u_1, \ldots, u_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ que consiste de vetores linearmente independentes que geram V. Para terminar a demonstração, basta colocar $u_{m+1} = v_{i_1}, \ldots, u_{m+r} = v_{i_r}$. ■