

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – UFG  
CAMPUS CATALÃO – CaC  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM**

**ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**QUADRADOS MÁGICOS**

por

**Rubiana Feliciano da Costa Santos**

Catalão – GO  
outubro/2008

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – UFG  
CAMPUS CATALÃO – CaC  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM**

**ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**QUADRADOS MÁGICOS**

por

**Rubiana Feliciano da Costa Santos**

Trabalho apresentado em cumprimento as  
exigências para a obtenção do título de  
Especialista em Matemática da Universidade  
Federal de Goiás - *Campus* Catalão.

Catalão – GO  
outubro/2008

*Há coisas que são colocadas em nossas vidas para nos reconduzir ao verdadeiro caminho de nossa Lenda Pessoal. Outras surgem para que possamos aplicar tudo aquilo que aprendemos. E, finalmente, algumas chegam para nos ensinar.*

*Paulo Coelho (O Monte Cinco)*

*Dedico este trabalho a todas as pessoas que sempre estiveram ao meu lado me incentivando a continuar, aos meus pais que são meus grandes heróis.*

## **AGRADECIMENTOS**

- Aos meus pais
- Aos meus amigos
- Às minhas irmãs

## AVALIAÇÃO DO TRABALHO MONOGRÁFICO

Após o exame da Monografia do(a) aluno(a) **RUBIANA FELICIANO DA COSTA SANTOS**, atribuímos os seguintes conceitos:

Conteúdo: \_\_\_\_\_

Forma: \_\_\_\_\_

Avaliação Geral: \_\_\_\_\_

Média: \_\_\_\_\_

Catalão, outubro de 2008.

A Banca:

---

Orientador  
Prof. Ms. Cleves Mesquita Vaz

---

Membro da Banca  
Prof.<sup>a</sup> Ms. Marta Borges

---

Membro da Banca  
Prof. Dr. Donald Mark Santee

## SUMÁRIO

RESUMO	
ABSTRACT	
1. INTRODUÇÃO	10
2. QUADRADOS MÁGICOS	13
3. QUADRADOS MÁGICOS DE ORDEM SUPERIOR	18
3.1 Método de Abul Wafa	18
3.1.1 Primeiro Método	18
3.1.2 Segundo Método	19
3.2 Método de Haytham	20
3.3 Método de um Autor Desconhecido do Século XII	26
3.4 Método Geral – Ordem Superior	29
3.5 Quadrados de Ordem Par	30
3.5.1 <i>Quadrado Mágico Obtido à Partir da Troca de Diagonal</i>	30
3.5.2 <i>Quadrado Mágico Obtido à Partir de Outro Modelo Inicial</i>	33
3.6 Método de Al-Kharagi	35
3.6.1 <i>Começando em um Quadrado Natural</i>	37
4. SUDOKU	38
CONCLUSÕES	44
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45

## RESUMO

Este trabalho tem como temática a descrição das características e a demonstração de alguns métodos para a construção dos quadrados mágicos. Segundo uma lenda chinesa o quadrado mágico surgiu no casco de uma tartaruga que apareceu no rio Lo, afluente do Rio Amarelo no centro da China. Conforme o misticismo oriental os quadrados mágicos que se compõem dos números de 1 a 9, formam todo o conhecimento e cada número é uma etapa de um caminho espiral que atravessa nove casas em cada volta. Os quadrados mágicos são uma tabela quadrada de ordem  $n$ , a soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais são iguais, porém o menor quadrado mágico possível é o de ordem 3. Inicialmente mostramos a construção de um quadrado mágico de ordem 3. Em seguida, vamos apresentamos os quadrados mágicos de ordem superior. Tratamos também em nosso trabalho do Sudoku um quebra-cabeça que não utiliza das mesmas propriedades dos quadrados mágicos, mas é baseado na colocação lógica dos números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa matriz de  $9 \times 9$ , constituída por  $3 \times 3$  submatrizes.

**Palavra-chave:** Quadrados Mágicos, Matemática, Aritmética.

## ABSTRACT

This work has the theme to describe the characteristics and demonstration of some methods for the construction of magic squares. According to Chinese legend a square magic appeared in the hull of a turtle that appeared in the Lo River, tributary of the Yellow River in the center of China. Eastern mysticism as the magic squares that are composed of numbers 1 the 9, form the basis and each issue is a step in a spiral path that crosses nine houses at every turn. The magic square is a square table in order, the sum of the numbers of lines, of columns and diagonals are equal, but the lowest possible is the magic square of order 3. Initially show the construction of a magic square of order 3. Then we will present the magic squares of higher order. We deal also in our work of a Sudoku Puzzle that does not use the same properties of magic squares, but is based on the logic of putting numbers 1 through 9 in each of the empty cells in a matrix of  $9 \times 9$ ,  $3 \times 3$  consists of sub-matrices.

**Keyword:** Magical Square, Arithmetic, Mathematics

## 1. INTRODUÇÃO

O assunto mais importante tratado nos processos booleanos é a matemática intrínseca na Teoria dos jogos, pois captura as propriedades essenciais de ambas as operações e da lógica do jogo.

Nos jogos matemáticos os assuntos mais abordados são os seguintes. A Introdução ao Sistema Binário de numeração e a construção dos Quadrados Mágicos utilizados pelos homens como formas de pensamento aleatório, heurístico e até algorítmico.



Fig.1: Um quadrado mágico em *A melancolia*, de Albrecht Durer, 1514.

Segundo a história da Matemática, os Quadrados Mágicos foram descobertos (ou inventados) pelos chineses há mais de 3.000 anos antes de Cristo. O quadrado mágico de nove casas surgiu no centro da China, a dois mil anos atrás, às margens de um rio, inscrito no osso peitoral de uma tartaruga, que é o símbolo da longevidade, e foi interpretado como revelação da geometria secreta do universo que está por trás de todas as coisas. Compõe-se dos números de 1 a 9, que, segundo o misticismo oriental, formam todo o conhecimento, e cada número é uma etapa de um caminho em espiral que atravessa nove casas em cada volta. Seus conceitos fundamentais são o ciclo e a alternância. As casas têm características próprias. Percorrer uma casa é receber suas influências durante o ano, o mês, a era. Nascer naquela casa é impregnar-se daquelas influências para sempre. O número 1, que é água, o princípio de tudo, o escuro e o inconsciente, fica abaixo. O algarismo 9, que é o fogo, o fim e a transformação, fica em cima, 3 e 4 representam madeira, a

criação, o surgimento e o crescimento; 6 e 7 são metal, outono, síntese, maturidade e recolhimento. 2, 8 e 5 são casas de transição, onde se reúnem as energias para mudar de direção. Esses números representam também todas as coisas que existem no universo. O Quadrado Mágico tem semelhanças profundas com o “*I Ching*” e em alguns lugares é chamado de “*Astrologia das Nove Estrelas*”, porque reflete a posição de Vega, Polaris e as sete estrelas da Ursa Maior no céu.

Mas em que consistem os *Quadrados Mágicos*?

Os chamados Quadrados Mágicos consistem em uma matriz numérica quadrada em que as somas das linhas, das colunas e das duas diagonais principais são sempre as mesmas, onde a ordem do quadrado mágico é a ordem da matriz quadrada.

Por exemplo, o Quadrado Mágico 3 x 3, é formado pelos nove dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dispostos em três linhas e três colunas.

Na idade média, os dígitos ao serem colocados aleatoriamente na matriz, levavam mais ou menos 40 dias de trabalho ininterrupto para a conclusão da tarefa. Com o advento dos computadores, esse tempo foi reduzido a minutos e até segundos, por matemáticos profissionais e amadores apaixonados pelo tema.

De qualquer forma parece natural que os primeiros interessados em resolver este problema tenham procurado soluções menos demoradas, como ocorre em todo o processo científico.

Para se ter uma idéia da complexidade desta brincadeira, em um procedimento aleatório o cálculo das possibilidades nos fornece o seguinte valor: 9! (fatorial de nove), isto é,  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  possibilidades de colocação dos dígitos na matriz.

Diante desta dificuldade os matemáticos da antigüidade imaginaram outros caminhos para a solução do problema.

No transcorrer de nosso trabalho, estudaremos os quadrados mágicos de ordem 3 e veremos que eles são os que possuem demonstração e características mais simples, onde se seguirmos os passos dados chegaremos ao quadrado mágico esperado.

Em seguida, trabalharemos com os quadrados mágicos de ordem superior, inicialmente os de ordem 5 e posteriormente os de ordem maior que 5, apresentaremos os métodos de *Abul Wafa Albuzjami*, o método de *Alib Ahmad Al-Antaki*, o método de *Haytham* e vários outros métodos.

Por fim, descreveremos um quebra-cabeça chamado *Sudoku*, que não utiliza das propriedades dos quadrados mágicos, mas é um jogo que apesar de usar números não exige do jogador que realize qualquer operação matemática, mas a colocação lógica dos números de 1 a 9, em cada uma das células vazias numa matriz de 9x9, com submatrizes de 3x3, com algumas pistas iniciais, um jogo que exige do jogador paciência , perseverança e que goste de desafios lógicos.

Uma das soluções consiste em construir algoritmos para a obtenção da configuração. E é justamente isso que trata o escopo deste trabalho monográfico.

## 2. QUADRADOS MÁGICOS

Na construção dos quadrados mágicos posiciona-se numa tabela quadrada números naturais diferentes, de forma que as somas em cada linha, cada coluna e cada uma das diagonais principais sejam iguais. Preenche-se tais quadrados em geral, com a seqüência dos primeiros números naturais. Num quadrado de  $n$  casas laterais, inscrevem-se os  $n^2$  primeiros números naturais. Sendo a soma desses números igual a:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{[n^2(n^2 + 1)]}{2},$$

a solução a ser encontrada em cada fileira, ou seja, a soma mágica é  $\frac{[n^2(n^2 + 1)]}{2}$ .

O menor quadrado mágico possível é o de ordem 3. Assim, podemos construir um quadrado mágico para qualquer valor de  $n$ ,  $n \geq 2$ . O quadrado de ordem 3 possui apenas uma forma, se não considerarmos as rotações e as inversões. O quadrado de ordem 4 oferece 880 possibilidades e esse número cresce rapidamente na medida em que  $n$  cresce.

Para construirmos um quadrado mágico de ordem 3, basta seguirmos os seguintes passos:

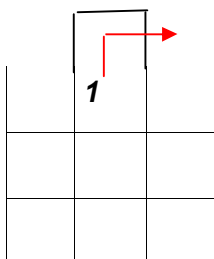
- 1- Comece colocando o número 1 no centro da primeira linha.

	1	

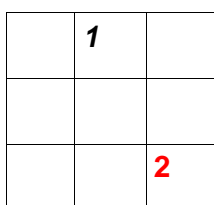
A partir daí, os números deverão ser colocados em ordem crescente.

Partindo do último número colocado, ande sempre para uma casa (um quadradinho) de cada vez para cima e para direita. Executando esse movimento, se você chegar a uma casa vazia, escreva o próximo número ali.

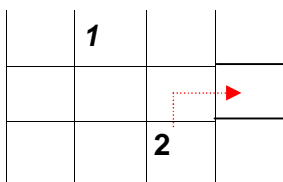
2- Partindo do número 1, execute o movimento do jogo.



O movimento leva você para uma casa fora do quadrado. Observe que esta casa é um prolongamento de uma das colunas do quadrado. Nesse caso, desça até a última casa vazia dessa coluna e escreva o número 2.



3- Partindo do número 2, execute o movimento do jogo. Você vai cair outra vez fora do quadrado.



Observe que a casa imaginária é um prolongamento de uma das linhas do quadrado. Sem sair da linha, recue à casa vazia que fica à esquerda. Escreva ali o número 3.

	1	
3		
		2

4- Reiniciando o movimento do jogo a partir do número 3 você encontrará uma casa ocupada.

	1	
3		
		2

Sempre que você chegar a uma casa ocupada, recue até a coluna de onde você acabou de partir e escreva o número na casa que fica logo abaixo do número de partida. Nesse caso, escreva o número 4 embaixo do número 3.

	1	
3		
4		2

5- Partindo do número 4 e executando o movimento do jogo, você conseguirá colocar os dois números seguintes sem dificuldade.

	1	6
3	5	
4		2

6- Executando o movimento do jogo a partir do número 6, você vai cair totalmente fora do quadrado. Observe:

	1	6	
3	5		
4		2	

Nesse caso, a casa imaginária não faz parte de nenhuma linha ou coluna do quadrado. Pare na coluna de onde você acabou de partir e escreva o número 7 embaixo do número 6.

	1	6
3	5	7
4		2

7- Executando, o movimento do jogo a partir do número 7 você vai cair mais uma vez numa casa fora do quadrado.

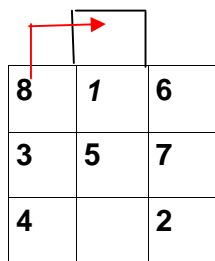
	1	6	
3	5	7	
4		2	

Observe que esta casa imaginária é um prolongamento da primeira linha do quadrado. Já vimos como proceder nesse caso. Procure nessa linha a casa que estiver vazia que ficar à esquerda. Escreva ali o número 8.

8	1	6
3	5	7
4		2

8- Para colocar o número 9, só resta uma casa. Mesmo, assim, valem as

regras estabelecidas. O movimento do jogo leva você para fora do quadrado.



8	1	6
3	5	7
4		2

Como a cela imaginária pertence à segunda coluna do quadrado, desça até a última casa vazia dessa coluna e escreva o número 9.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

*(Está pronto o quadrado mágico!)*

### 3. QUADRADOS MÁGICOS DE ORDEM SUPERIOR

#### 3.1 MÉTODO DE ABUL WAFA

A origem dessa ciência tornou-se conhecida por meio de dois textos do século X. d.C Em particular, para ordem 5, são destacados os trabalhos de **Abul Wafa Al-Buzjani (940-998)**, famoso por seus trabalhos em astronomia e trigonometria. O outro é o de **Alib Ahmad Al-Antaki** (morto em **987**). O tratado do primeiro nos permite seguir as tentativas antigas de chegar a métodos gerais, o segundo ignora os métodos de construção simples, principalmente aqueles originados de transformações do quadrado natural, ou seja, do quadrado de mesma ordem que o quadrado a ser construído, que contenha os números consecutivos.

**Abul Wafa Al-Buzjani** deixou dois exemplos individuais para o quadrado de ordem 5.

##### 3.1.1 Primeiro Método

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>

Mantemos os números das diagonais do quadrado natural em seu lugar, trocamos os números do quadrado interior de ordem 3 com os da casa distante de duas casa na diagonal.

1	2	3	12	5
18	7	20	9	10
11	4	13	22	15
16	17	6	19	8
21	14	23	24	25

Trocamos finalmente os números das extremidades que ainda não foram trocados com aqueles da fileira oposta, conservando sua ordem de sucessão.

1	23	24	12	5
18	7	20	9	11
10	4	13	22	16
15	17	6	19	8
21	14	2	3	25

### 3.1.2 Segundo Método

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Sem mudar as posições dos elementos, nos números das diagonais invertamos os pares de números aproximando a diagonal descendente.

1	14	3	4	5
18	7	20	9	10
11	24	13	2	15
16	17	6	19	8
21	22	23	12	25

Depois, como antes, trocamos os números restantes das bordas como os das laterais opostas.

1	14	22	23	5
18	7	20	9	11
10	24	13	2	15
16	17	6	19	8
21	3	4	24	25

### 3.2 Método de Haytham

Este método proposto por *Ibn Al-Haytham* (cerca de 965-1041) está fundamentado nos relatos de um autor desconhecido do século XII. As propriedades dos quadrados mágicos vão nos ajudar a completar o quadrado em questão.

Sendo assim citaremos as propriedades dos quadrados mágicos :

- 1 Não é possível construir um quadrado mágico de ordem 2.
- 2 É possível adicionar ou multiplicar todos os números de um quadrado mágico pela mesma quantidade perdendo propriedades fundamentais como sejam a consecutividade numérica ou o início em 1.

- 3 É possível trocar quaisquer duas ou mais linhas (ou colunas) de um quadrado mágico, obtendo um novo quadrado.
- 4 Pode rodar-se um quadrado mágico quer no sentido horário quer anti-horário para obter um novo quadrado mágico.
- 5 Pode refletir-se um quadrado mágico segundo a mediana horizontal ou vertical ou uma das diagonais principais para obter um novo quadrado mágico.

1	2	<u>3</u>	4	5
6	7	<u>8</u>	9	10
<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>
16	17	<u>18</u>	19	20
21	22	<u>23</u>	24	25

Os números da linha e da coluna medianas de um quadrado natural tornam-se os das duas diagonais do quadrado a ser construído.

<b>11</b>				<b>3</b>
	<b>12</b>		<b>8</b>	
		<b>13</b>		
	<b>18</b>		<b>14</b>	
<b>23</b>				<b>15</b>

Sobram linhas e colunas para preencher. Ora, para cada uma, exceto para a linha e a coluna medianas, duas casas já estão ocupadas.

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
-----------	-----------	----------	-----------	----------

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
	<b>12</b>		<b>8</b>	
		<b>13</b>		
	<b>18</b>		<b>14</b>	
<b>23</b>				<b>15</b>

A diagonal que contém os números 3 e 11 deve conter elementos da diagonal quebrada correspondente do quadrado natural.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>

Assim, com a coluna que contém 8 e 14 será feita de elementos da diagonal correspondente.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
	<b>12</b>		<b>8</b>	
		<b>13</b>	<b>21</b>	
	<b>18</b>		<b>14</b>	
<b>23</b>			<b>2</b>	<b>15</b>

A linha que contém os números 14 e 18 deve conter elementos da diagonal quebrada correspondente.

<b>1</b>	2	3	4	5
6	7	8	9	<b>10</b>
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

<b>11</b>	24	7	20	<b>3</b>
	<b>12</b>		<b>8</b>	
		<b>13</b>	21	
	<b>18</b>	1	<b>14</b>	22
<b>23</b>			2	<b>15</b>

A coluna que contém os números 11 e 23 será feita de elementos da diagonal correspondente.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

<b>11</b>	24	7	20	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>12</b>		<b>8</b>	
17		<b>13</b>	21	
10	<b>18</b>	1	<b>14</b>	22
<b>23</b>			2	<b>15</b>

A linha que contém os números 12 e 8 será feita de elementos da diagonal correspondente.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17		13	21	
10	18	1	14	22
23			2	15

A coluna que contém os números 12 e 18 será feita de elementos da diagonal correspondente.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>17</b>	<b>5</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	
<b>10</b>	<b>18</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>22</b>
<b>23</b>	<b>6</b>		<b>2</b>	<b>15</b>

A linha que contém os números 23 e 15 deve conter elementos da diagonal quebrada correspondente.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>
<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>17</b>	<b>5</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	
<b>10</b>	<b>18</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>22</b>
<b>23</b>	<b>6</b>	<b>19</b>	<b>2</b>	<b>15</b>

A linha que contém o número 13 será feita dos elementos da diagonal correspondente.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

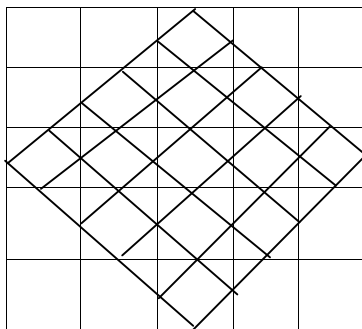
<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>17</b>	<b>5</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>9</b>
<b>10</b>	<b>18</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>22</b>
<b>23</b>	<b>6</b>	<b>19</b>	<b>2</b>	<b>15</b>

Portanto, o quadrado mágico é:

<b>11</b>	<b>24</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>17</b>	<b>5</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>9</b>
<b>10</b>	<b>18</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>22</b>
<b>23</b>	<b>6</b>	<b>19</b>	<b>2</b>	<b>15</b>

### 3.3 Método de um Autor Desconhecido do Século XII

Primeiramente, inscreve-se no quadrado de ordem escolhido, (no nosso caso de ordem 5), um quadrado oblíquo e menor, de mesma ordem escolhida.



Ao colocar números naturais no quadrado externo, algumas casas do quadrado oblíquo estarão preenchidas, enquanto outras, as dos cruzamentos, ficam vazias.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Deslocando os grupos de três números que ocupam cada um dos cantos do quadrado natural em direção ao lado oposto do quadrado oblíquo.,ou seja,girando para a direita e retirando o quadrado oblíquo com os números que estão contidos em seu interior, do quadrado de ordem 5, teremos:

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	
23		19		15

Agora falta preencher as casas vazias, para isso basta seguirmos os passos:

1	2		4	5
6				10
16				20
21	22		24	25

O numero 6 e 2 vai substituir a terceira casa com cruzamento do quadrado obliquo.

11		7		3
	12		8	
17		13		9
	18		14	
23	6	19	2	15

Analogamente, para os números 4 e 10, 24 e 20 e 16 e 22 seguiremos os mesmos passos. Assim, teremos:

11	24	7	20	3
4	12		8	16
17		13		9
10	18		14	22
23	6	19	2	15

Ainda faltam quatro casas a serem preenchidas. Basta pegarmos os pontos que estão no canto do quadrado natural e colocarmos na segunda casa com cruzamento em direção ao lado oposto do quadrado obliquo



7	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

### 3.5 Quadrados de Ordem Par

*Ibn Al-Haytham* menciona que os quadrados naturais com ordem par têm duas propriedades, análogas aos precedentes, apesar disso já ser conhecido antes. A soma da metade dos elementos de uma linha, unida à soma da metade dos elementos não alinhados com os precedentes, pertencendo à fileira colocada simetricamente em relação à fileira mediana, é igual à soma mágica. Aliás, a soma em cada diagonal (principal ou quebrada) é igual à soma mágica. Essas propriedades permitiram estabelecer os primeiros quadrados de ordem par.

#### 3.5.1. Quadrado Mágico Obtido à Partir da Troca de Diagonal

Permite construir quadrados de ordem  $n = 4k$ ,  $k > 0$ .

Fazendo  $k=1$ , teremos um quadrado que será uma matriz 4x4, portanto vale a propriedade de quadrado mágico.

Trabalharemos agora fazendo  $k = 2$ , assim temos:

			•	•	•	•	
		•	•			•	•
•	•						•
•				•	•		•
•				•	•		•
•	•						•
		•	•			•	•
			•	•	•	•	

			•	•
		•	•	
•	•			
•				•

*(Representa o primeiro quadrante)*

No primeiro quadrante, colocamos pontos de forma que se tenha exatamente  $k$  por fileira horizontal e vertical. Aproximamos em seguida esse quadrante de seus vizinhos, girando-o em torno das laterais, e transferimos os pontos para as casas encobertas. Completamos o quadrado enumerando as casas a partir de um ângulo e incluindo o número obtido apenas nas casas com pontos. Chegando ao ângulo oposto, partimos novamente, enumerando de novo as casas e incluímos desta vez, o número obtido nas casas vazias. O quadrado obtido é mágico.

←

<b>64</b>	<b>63</b>	•	•	•	•	<b>58</b>	<b>57</b>
<b>56</b>	•	•	<b>53</b>	<b>52</b>	•	•	<b>49</b>
•	•	<b>46</b>	<b>45</b>	<b>44</b>	<b>43</b>	•	•
•	<b>39</b>	<b>38</b>	•	•	<b>35</b>	<b>34</b>	•
•	<b>31</b>	<b>30</b>	•	•	<b>27</b>	<b>26</b>	•
•	•	<b>22</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>19</b>	•	•
<b>16</b>	•	•	<b>13</b>	<b>12</b>	•	•	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>7</b>	•	•	•	•	<b>2</b>	<b>1</b>



		<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	
	<b>10</b>	<b>11</b>			<b>14</b>	<b>15</b>
<b>17</b>	<b>18</b>				<b>23</b>	<b>24</b>
<b>25</b>			<b>28</b>	<b>29</b>		<b>32</b>
<b>33</b>			<b>36</b>	<b>37</b>		<b>40</b>
<b>41</b>	<b>42</b>				<b>47</b>	<b>48</b>
	<b>50</b>	<b>51</b>			<b>54</b>	<b>55</b>
		<b>59</b>	<b>60</b>	<b>61</b>	<b>62</b>	

64	63	3	4	5	6	58	57
56	10	11	53	52	14	15	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	50	51	13	12	54	55	9
8	7	59	60	61	62	2	1

(Este é o quadrado mágico obtido.)

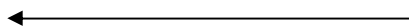
### 3.5.2. Quadrado Mágico Obtido à Partir de Outro Modelo Inicial

•			•	•			•
	•	•			•	•	
	•	•			•	•	
•			•	•			•
	•	•			•	•	
	•	•			•	•	
•			•	•			•

•			•
	•	•	
	•	•	
•			•

(Primeiro quadrante)

O método usado para a construção do quadrado nesta seção é análogo ao usado na seção anterior, ou seja, no primeiro quadrante, colocamos pontos de forma que se tenha exatamente  $k$  por fileira horizontal e vertical. Aproximamos em seguida esse quadrante de seus vizinhos, girando-o em torno das laterais, e transferimos os pontos para as casas encobertas. Completamos o quadrado enumerando as casas a partir de um ângulo e incluindo o número obtido apenas nas casas com pontos. Chegando ao ângulo oposto, partimos novamente, enumerando de novo as casas e incluímos desta vez, o número obtido nas casas vazias. O quadrado obtido é mágico.



•	<b>63</b>	<b>62</b>	•	•	<b>59</b>	<b>58</b>	•
<b>56</b>	•	•	<b>53</b>	<b>52</b>	•	•	<b>49</b>
<b>48</b>	•	•	<b>45</b>	<b>44</b>	•	•	<b>41</b>
•	<b>39</b>	<b>38</b>	•	•	<b>35</b>	<b>34</b>	•
•	<b>31</b>	<b>30</b>	•	•	<b>27</b>	<b>26</b>	•
<b>24</b>	•	•	<b>21</b>	<b>20</b>	•	•	<b>17</b>
<b>16</b>	•	•	<b>13</b>	<b>12</b>	•	•	<b>9</b>
•	<b>7</b>	<b>6</b>	•	•	<b>3</b>	<b>2</b>	•



<b>1</b>			<b>4</b>	<b>5</b>			<b>8</b>
	<b>10</b>	<b>11</b>			<b>14</b>	<b>15</b>	
	<b>18</b>	<b>19</b>			<b>22</b>	<b>23</b>	
<b>25</b>			<b>28</b>	<b>29</b>			<b>32</b>
<b>33</b>			<b>36</b>	<b>37</b>			<b>40</b>
	<b>42</b>	<b>43</b>			<b>46</b>	<b>47</b>	
	<b>50</b>	<b>51</b>			<b>54</b>	<b>55</b>	
<b>57</b>			<b>60</b>	<b>61</b>			<b>64</b>

<b>1</b>	<b>63</b>	<b>62</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>59</b>	<b>58</b>	<b>8</b>
<b>56</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>53</b>	<b>52</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>49</b>
<b>48</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>45</b>	<b>44</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>41</b>
<b>25</b>	<b>39</b>	<b>38</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>35</b>	<b>34</b>	<b>32</b>
<b>33</b>	<b>31</b>	<b>30</b>	<b>36</b>	<b>37</b>	<b>27</b>	<b>26</b>	<b>40</b>
<b>24</b>	<b>42</b>	<b>43</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>46</b>	<b>47</b>	<b>17</b>
<b>16</b>	<b>50</b>	<b>51</b>	<b>13</b>	<b>12</b>	<b>54</b>	<b>55</b>	<b>9</b>
<b>57</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>60</b>	<b>61</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>64</b>

(Quadrado mágico obtido)

### 3.6 Método de Al-Kharagi

Para compor um quadrado mágico de ordem  $n = 4k + 2$ . Tomando  $k = 1$ , teremos  $n = 6$ .

Tomamos o primeiro quadrante, de ordem  $2k + 1$  e colocamos em sua fileira  $k = 1$  um ponto preto, um ponto vermelho e um ponto azul, estes dois sendo inscritos

fora da diagonal.

	•	•	•			
	•	•	•			
	•	•	•			

Completamos a repartição no primeiro quadrante de forma a que as diagonais quebradas tenham o mesmo tipo de pontos e aproximamos em parte esse quadrante dos outros, transferindo os pontos para todos os lados e os pontos azuis unicamente no quadrante vizinho inferior.

→
←

	•	•	•	•		•
	•	•	•		•	•
	•	•	•	•		
		•	•		•	
	•	•				•

→
←

Então, contamos as casas. Partimos do ângulo do primeiro quadrante para as casas dotadas de um ponto preto, seguindo a flecha preta; do outro ângulo superior para os pontos azuis no sentido da flecha azul; do ângulo inferior oposto para os pontos vermelhos e seguindo a vermelha; e do ângulo oposto ao primeiro para as casas vazias e seguindo a flecha verde. A cada vez, só inscrevemos o número correspondente na casa quando ela é da cor conforme a regra seguida.

1	•	•	•		6
•	8	•		11	•
•	•	15	16	•	
•		21	22		
	26	•		29	
31	•				36

1	5	33	34	32	6
25	8	10	27	11	30
18	20	15	16	23	19
24	17	21	22	14	13
12	26	28	9	29	7
31	35	4	3	2	36

### 3.6.1. Começando em um Quadrado Natural

Os números são colocados na ordem, a soma das diagonais principais (em vermelho), da linha e da coluna mediano (em verde) e das diagonais quebradas (em azul e violeta) é igual a soma mágica, neste caso, igual a 175, para ordem considerada 7.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

## 4. SUDOKU

Sudoku é um quebra-cabeça baseado na colocação lógica dos números de 1 a 9 em cada uma das células vazias numa matriz de 9 x 9, constituída por 3 x 3 submatrizes chamadas regiões, e com algumas pistas iniciais, onde cada coluna, linha e região só pode ter um número de cada um dos 1 a 9.

Tudo indica que o divertido passatempo matemático foi projetado por Howard Garns, um arquiteto aposentado, o qual foi publicado pela primeira vez em 1979, inicialmente nos Estados Unidos. Posteriormente em 1984, foi levado para o Japão, onde se tornou uma verdadeira febre nacional. No Brasil, o sudoku é publicado pela *Coquetel* (Ediouro) desde o início de 2005.

O nome Sudoku é a abreviação japonesa para a longa frase ***suiji wa dkushin ni kagiru*** que significa “os dígitos devem permanecer únicos”. É um jogo de raciocínio e lógica. A principal diferença entre os níveis de dificuldade está na relevância e na disposição dos números dados.

O Sudoku é um jogo que apesar de usar números não exige do jogador que realize qualquer operação matemática. Para que você se saia bem no jogo, é necessário que se tenha paciência, perseverança e que goste de desafios lógicos.

Segundo a psicologia, ao se jogar Sudoku algumas áreas do cérebro entram em ação, entre elas destacam-se:

- 1) A região do córtex pré-frontal é ativada. É onde fica a memória de trabalho, que nós dá a capacidade de prestar atenção, guardar informações, desenvolver estratégias e tomar decisões.
- 2) Os núcleos de base exercitam a capacidade de achar formas diferentes de resolver um problema.
- 3) O córtex parietal é ativado quando usamos o raciocínio matemático. No Sudoku, mesmo sem fazer contas, você tem de realizar combinações

lógicas com números.

Dicas para se jogar o sudoku:

- Ao iniciar o jogo, focalize um número, ou seja, verifique qual algarismo aparece a maior quantidade de vezes e tente colocá-lo em todas as linhas, colunas e quadrantes.
- Trabalhe com as linhas, colunas e quadrantes que precisam de poucos números para ficarem completos, focando assim nos quadrantes com muitos campos em branco.
- Faça a interseção entre linhas e colunas para saber quais números não podem entrar nos espaços ainda não preenchidos, reduzindo assim as possibilidades de posição de um algarismo; mas sempre observando se não existem números repetidos dentro de um quadrante.
- Às vezes é necessário “*chutar*”, mas este palpite deverá ser testado em algumas casas e para ver como fica a situação dos outros números. Não *chute* às cegas, pois pode correr o risco de *travar* o jogo.
- Marque sempre aqueles campos que só podem ser preenchidos com aquele algarismo, e marque esses números para que não tenha que checar todos os espaços preenchidos se o jogo travar.
- Trabalhe com mais de um número; isso facilita o preenchimento das lacunas. Em alguns casos, ficam três números para três espaços, mas com várias possibilidades, e olhando esses mesmos números em outros quadrantes, acabamos eliminando uma (ou mais) dessas opções.

Apresentamos então, alguns exemplos do tão famoso Sudoku:

**Exemplo 1:**

8		2	4	1	5		9	6
	5	7	9		6	4		8
9	6	4	7	8		5	2	1
3	7		5	9	2		1	4
2		5	6		1	9	8	3
6	1	9		3	4	2	5	
7	2	1	3	4		8		5
4	9			5	8	3	7	2
	8	3	2	6	7	1	4	

**Exemplo 2:**

4	7	1	8		5		6	9
	3	2	1	9		4	8	7
	9	6	7	3	4	1		2
3		4	2	6		5	9	8
6	5		9	4	8	2	3	
9	2	8		5	1	7	4	
7	8	5		1	3		2	4
2	6		4		9	8	1	5
1		9	5	8	2	6		3

**Exemplo 3:**

8	1	5		6	7	3	2	9
	4	3	9	2		5		6
2		9	1	3	5	7		8
3	5	1	6		2	9	8	
4	2			7	9	6	5	1
	7	6	8	5	1		3	2
5	9		2		3	8	6	4
1		4		8	6	2	9	5
6	8	2	5	9	4		7	

**Exemplo 4:**

7	2	5				4		
6	1	8	2			5	3	
		9			6	7	8	
				5			1	
4					3		7	
		7	6					
9								5
		2			9		6	
		1	8					

Resoluções dos exemplos acima citados:

**Exemplo 1:**

8		2	4	1	5		9	6
	5	7	9		6	4		8
9	6	4	7	8		5	2	1
3	7		5	9	2		1	4
2		5	6		1	9	8	3
6	1	9		3	4	2	5	
7	2	1	3	4		8		5
4	9			5	8	3	7	2
	8	3	2	6	7	1	4	

8	<b>3</b>	2	4	1	5	<b>7</b>	9	6
<b>1</b>	5	7	9	<b>2</b>	6	4	<b>3</b>	8
9	6	4	7	8	<b>3</b>	5	2	1
3	7	<b>8</b>	5	9	2	<b>6</b>	1	4
2	<b>4</b>	5	6	<b>7</b>	1	9	8	3
6	1	9	<b>8</b>	3	4	2	5	<b>7</b>
7	2	1	3	4	<b>9</b>	8	<b>6</b>	5
4	9	<b>6</b>	<b>1</b>	5	8	3	7	2
<b>5</b>	8	3	2	6	7	1	4	<b>9</b>

**Exemplo 2:**

4	7	1	8		5		6	9
	3	2	1	9		4	8	7
	9	6	7	3	4	1		2
3		4	2	6		5	9	8
6	5		9	4	8	2	3	
9	2	8		5	1	7	4	
7	8	5		1	3		2	4
2	6		4		9	8	1	5
1		9	5	8	2	6		3

4	7	1	8	<b>2</b>	5	<b>3</b>	6	9
<b>5</b>	3	2	1	9	<b>6</b>	4	8	7
<b>8</b>	9	6	7	3	4	1	<b>5</b>	2
3	<b>1</b>	4	2	6	<b>7</b>	5	9	8
6	5	<b>7</b>	9	4	8	2	3	<b>1</b>
9	2	8	<b>3</b>	5	1	7	4	<b>6</b>
7	8	5	<b>6</b>	1	3	<b>9</b>	2	4
2	6	<b>3</b>	4	<b>7</b>	9	8	1	5
1	<b>4</b>	9	5	8	2	6	<b>7</b>	3

**Exemplo 3:**

8	1	5		6	7	3	2	9
	4	3	9	2		5		6
2		9	1	3	5	7		8
3	5	1	6		2	9	8	
4	2			7	9	6	5	1
	7	6	8	5	1		3	2
5	9		2		3	8	6	4
1		4		8	6	2	9	5
6	8	2	5	9	4		7	

8	1	5	<b>4</b>	6	7	3	2	9
<b>7</b>	4	3	9	2	<b>8</b>	5	<b>1</b>	6
2	<b>6</b>	9	1	3	5	7	<b>4</b>	8
3	5	1	6	<b>4</b>	2	9	8	<b>7</b>
4	2	<b>8</b>	<b>3</b>	7	9	6	5	1
<b>9</b>	7	6	8	5	1	<b>4</b>	3	2
5	9	<b>7</b>	2	<b>1</b>	3	8	6	4
1	<b>3</b>	4	<b>7</b>	8	6	2	9	5
6	8	2	5	9	4	<b>1</b>	<b>7</b>	<b>3</b>

**Exemplo 4:**

7	2	5				4		
6	1	8	2			5	3	
		9			6	7	8	
				5			1	
4					3		7	
		7	6					
9								5
		2			9		6	
		1	8					

7	2	5	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>9</b>	<b>6</b>
6	4	8	2	9	7	5	3	1
1	3	9	5	4	6	7	8	2
<b>8</b>	<b>9</b>	<b>3</b>	7	5	2	6	1	4
4	5	6	9	1	3	2	7	8
2	1	7	6	8	4	3	5	9
9	7	4	3	6	1	8	2	5
5	8	2	4	7	9	1	6	3
3	6	1	8	2	5	9	4	7

## **CONCLUSÕES**

No nosso trabalho tentamos fazer uma breve apresentação dos muitos meios de se chegar aos quadrados mágicos, desde o método mais simples ao mais complexo.

Vimos que na antiguidade, os chineses acreditavam que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para a toda vida.

Mostramos que a matemática não é feita somente de teoremas e fórmulas, ela pode ser construída de forma que o ser humano possa estudar brincar ao mesmo tempo, ativando as várias partes do cérebro, assim desenvolvendo a atenção, o raciocínio para que possamos fazer combinações lógicas.

Citamos também sobre o Sudoku, um quebra-cabeça, que apesar de pouco tempo de sua publicação já vem conquistando fãs de todas as idades e lugares do mundo. Este é um passatempo que exige paciência, perseverança e concentração e que apesar de ser um jogo matemático não se usa as operações matemáticas, se diferenciando dos quadrados mágicos por não possuir regras para a sua resolução.

Assim, se encerra nosso trabalho monográfico, que foi feito com muito carinho e dedicação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**BOYER, C. B.:** *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo Ed. Edgard Blucher Ltda, 1999.

**GUELLI, O.** *Contando a História da Matemática. Jogando com a Matemática* 3º ed. São Paulo. Editora Ática, 1993, p. 33-39

**KAWANO, C.:** *A Matemática do Sudoku!* Galileu, nº 180, São Paulo: Ed. Globo. Julho, 2006. p.68-71.

**SESIANO, J.:** *Quadrados Mágicos do Islã*. Scientific American Brasil. Ed. Especial nº 11, Portugal, Ed. Duetto, p.36-39.

HISTORIA DO SUDOKU, 2006<' [http://www.abril.com.br/noticia/diversao/no\\_168200.shtml](http://www.abril.com.br/noticia/diversao/no_168200.shtml) '>Acesso em 15/03/2007.

QUADRADOSMAGICOS<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado\\_m%C3%A1gico#Classifica.C3.A7.C3.B5es](http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado_m%C3%A1gico#Classifica.C3.A7.C3.B5es)> Acesso em15/01/2007.

SUDOKU O QUEBRA CABEÇA MAIS POPULAR DO MUNDO ATUAL <<http://www.sudoku.hex.com.br/>> Acesso em 05/04/2007