

Parábola, elipse e hipérbola

Enrique Morales Rodríguez

enmora@siu.buap.mx

Resumen

Estas notas surgen como complemento del curso de Matemáticas IV de la Preparatoria Regional “Simón Bolívar”. A estas alturas del curso ya debieran haberse cubierto los temas de *recta* y *circunferencia* de geometría analítica. Además, recalcamos que se necesita un buen respaldo de álgebra y aritmética, por lo que si el lector necesita material de estos temas, puede pedirlos a la dirección electrónica del autor

Índice

1. Parábola	2
1.1. Con vértice en el origen	2
1.1.1. Eje focal en el eje x	2
1.1.2. Eje focal en el eje y	3
1.2. Con vértice en cualquier punto $V(h, k)$	4
1.2.1. Eje focal paralelo al eje x	5
1.2.2. Eje focal paralelo al eje y	5
2. Elipse	6
2.1. Con centro en el origen	7
2.1.1. Con eje focal en el eje x	7
2.1.2. Con eje focal en el eje y	7
2.2. Con centro en $C(h, k)$	9
2.2.1. Eje mayor paralelo al eje x	9
2.2.2. Eje mayor paralelo al eje Y	9
3. Hipérbola	11
3.1. Con centro en el origen	11
3.1.1. Eje focal en el eje x	11
3.1.2. Eje focal en el eje y	12
3.2. Con centro en $C(h, k)$	13

1. Parábola

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que está siempre a la misma distancia de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

En la figura 1 se muestran los elementos que forman una parábola: El Foco (F), la directriz (d), el eje de la parábola y los segmentos p (de la parábola a la directriz) y p' (de la parábola al foco), los cuales siempre cumplen la condición $p = p'$. Estos elementos son las propiedades que determinaremos a partir de la ecuación de la parábola o, si conocemos estos, determinar la ecuación.

El punto donde se cruza la parábola con su eje se llama Vértice (V). Algunos autores citan también al “lado recto” de la parábola, que es el segmento de recta perpendicular al eje de la parábola, que pasa por el foco y toca en ambos extremos a la parábola.

En general, lo que debemos conocer de la parábola son sus propiedades:

- El foco $F(x,y)$
- El vértice $V(x,y)$
- La longitud del lado recto
- El eje de la parábola (eje focal)
- La ecuación de la directriz

Y todo eso se conoce a partir de:

- La ecuación

1.1. Con vértice en el origen

En este caso, el eje de la parábola, el cual también es su eje de simetría (eje focal), corresponde a un eje coordenado y entonces tenemos dos casos cuando el eje de la parábola coincide con el eje x (parábola horizontal) y cuando el eje de la parábola coincide con el eje y (parábola vertical).

La situación se complica aún más pues debemos tomar en cuenta también que para los dos casos tenemos dos opciones: de la horizontal: que abra a la derecha o izquierda; de la vertical: que abra hacia arriba o hacia abajo.

1.1.1. Eje focal en el eje x

En este caso la parábola es horizontal y la ecuación es:

$$y^2 = 4px \tag{1}$$

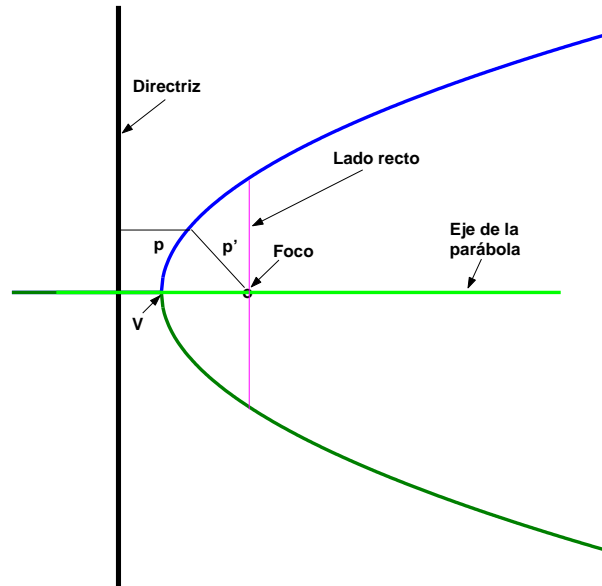


FIGURA 1: Elementos de una parábola

Y sus elementos son:

El foco $F(p,0)$	El vértice $V(0,0)$
La longitud del lado recto $l = 4p $	El eje de la parábola (eje focal) $y = 0$
La ecuación de la directriz es: $x = -p$	Si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>derecha</u> . Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>izquierda</u>

1.1.2. Eje focal en el eje y

En este caso la parábola es vertical y la ecuación es:

$$x^2 = 4py \quad (2)$$

Los elementos, en este caso, son:

El foco $F(0,p)$	El vértice $V(0,0)$
La longitud del lado recto $l = 4p $	El eje de la parábola (eje focal) $x = 0$
La ecuación de la directriz es: $y = -p$	si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>arriba</u> . Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>abajo</u>

Ejemplo: Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje y , pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución: Al analizar el problema vemos que la ecuación es de la forma 2:

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de la parábola, por lo que entonces tenemos:

$$\begin{aligned}(4)^2 &= 4p(-2) \\ 16 &= -8p \quad \therefore \\ p &= \frac{16}{-8} \\ p &= -2\end{aligned}$$

Entonces la ecuación es:

$$x^2 = -8y$$

De la lista de elementos, podemos ver que:

- El foco es: $F(0, -2)$
- La ecuación de la directriz es: $y = -2$
- La longitud del lado recto es: $l = |4p| = |4(-2)| = |-8| = 8$

Ejercicios Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada:

1.- $y^2 = 12x$	2.- $x^2 = 12y$
3.- $y^2 + 8x = 0$	4.- $x^2 + 2y = 0$
5.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco $F(0, -3)$.	6.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco $F(3, 0)$.
7.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y la directriz es la recta $y - 5 = 0$.	8.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y la directriz es la recta $x + 5 = 0$.

1.2. Con vértice en cualquier punto $V(h, k)$

Cuando se ha movido la parábola y su eje es paralelo la eje x o y , su vértice ocupa el punto $V(h, k)$, entonces su ecuación es:

1.2.1. Eje focal paralelo al eje x

En este caso la parábola es horizontal y la ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (3)$$

Y sus elementos son:

El foco $F(p+h, k)$	El vértice $V(h, k)$
La longitud del lado recto $l = 4p $	El eje de la parábola (eje focal) $y = k$
La ecuación de la directriz es: $x = h - p$	Si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>derecha</u> . Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>izquierda</u>

1.2.2. Eje focal paralelo al eje y

En este caso la parábola es vertical y la ecuación es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (4)$$

Los elementos, en este caso, son:

El foco $F(h, k+p)$	El vértice $V(h, k)$
La longitud del lado recto $l = 4p $	El eje de la parábola (eje focal) $x = h$
La ecuación de la directriz es: $y = k - p$	si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>arriba</u> . Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>abajo</u>

Ejemplo: Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, 4)$ y su foco es $F(3, 2)$. También escribir la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto.

Solución: Notemos que la abscisa (valor sobre el eje x) de ambos puntos se repite y es 3, entonces, el eje focal es *paralelo al eje y* . Entonces debemos usar la fórmula:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Tomamos los valores de $V(\underbrace{3}_h, \underbrace{4}_k)$ y nuestra ecuación toma la forma:

$$(x - 3)^2 = 4p(y - 4)$$

Sabemos que p es la distancia del foco F al vértice V , esto se reduce a $p = |\overline{FV}| = |4 - 2| = 2$. Pero como F está abajo de V , entonces p es negativa, esto es: $p = -2$.

Finalmente, la Ecuación de nuestra parábola es:

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4)$$

La longitud del lado recto l es:

$$l = |4p| = |a(-2)|$$

$$l = 8$$

La ecuación de la directriz es:

$$y = k - p = 4 - (-2) = 4 + 2$$

$$y = 6$$

2. Elipse

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados *focos* es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

En la figura 2 se muestran a la elipse y los elementos que la constituyen. El eje sobre el cual están los focos F y F' es el eje mayor, perpendicular a este en su punto medio está el eje menor. Los puntos donde la elipse cruza al eje mayor se llaman vértices V y V' . El punto donde se cruzan los ejes es el centro de la elipse C . El eje mayor mide $2a$, el eje menor mide $2b$.

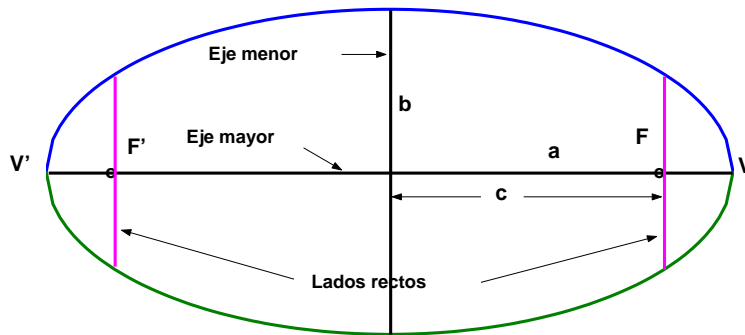


FIGURA 2: Elementos de una elipse

Los elementos que debemos tener en cuenta son:

- Los focos F y F' .
- Los vértices V y V' .

- La longitud del eje mayor $2a$
- La longitud del eje menor $2b$
- La distancia entre los focos $2c$
- La longitud de los lados rectos
- La excentricidad e , que es la relación entre la distancia focal y el eje mayor:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 \tag{5}$$

2.1. Con centro en el origen

2.1.1. Con eje focal en el eje x .

La ecuación es, en este caso:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Los elementos son:

focos en: $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$	Los vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$
La longitud del eje mayor es $2a$	La longitud de eje menor es $2b$
La longitud focal es $2c$	Las longitudes están ligadas por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$
Longitud del lado recto: $l = \frac{2b^2}{a}$	Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

2.1.2. Con eje focal en el eje y

Ahora tomamos la ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{7}$$

Los elementos son:

focos en: $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$	Los vértices son $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$
La longitud del eje mayor es $2a$	La longitud de eje menor es $2b$
La longitud focal es $2c$	Las longitudes están ligadas por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$
Longitud del lado recto: $l = \frac{2b^2}{a}$	Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

NOTA. Debemos notar en la ecuación de la parábola (6 y 7) que la literal correspondiente al eje mayor (a) esta como numerador del eje al que es paralelo.

Ejemplo: Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje y . Si uno de los focos es el punto $F(0, 3)$ y la excentricidad es igual a $e = \frac{1}{2}$, hallar las coordenadas del otro foco, las longitudes de los ejes, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de los lados rectos

Solución: Como uno de los focos es $(0, 3)$, tenemos que $c = 3$ y las coordenadas del otro foco son $F'(0, -3)$. Tomando la excentricidad que mencionan en el problema, tenemos que:

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ \frac{1}{2} &= \frac{3}{a} \quad \text{Despejando } a, \\ (1)a &= (3)(2) \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Por lo que entonces, podemos aplicar la relación entre las longitudes, esto es:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 && \text{De donde, al despejar } b, \text{ tenemos:} \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ b &= \sqrt{a^2 - c^2} && \text{Sustituyendo los valores de } a \text{ y } c \\ b &= \sqrt{(6)^2 - (3)^2} \\ b &= \sqrt{36 - 9} \\ b &= \sqrt{27} \end{aligned}$$

Y el eje mayor mide: $2a = 2(6) = 12$, mientras que el eje menor mide: $2b = 2\sqrt{27}$.
Y la ecuación de la elipse es:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(\sqrt{27})^2} + \frac{y^2}{(6)^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, la longitud del lado recto es:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{27})^2}{6} \\
 &= \frac{2(27)}{6} = \frac{54}{6} \\
 l &= 9
 \end{aligned}$$

2.2. Con centro en $C(h, k)$

Al igual que con centro en el origen, tenemos dos casos:

2.2.1. Eje mayor paralelo al eje x

La ecuación es:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Y sus elementos son:

focos en: $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$	Los vértices son $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$
La longitud del eje mayor es $2a$	La longitud de eje menor es $2b$
La longitud focal es $2c$	Las longitudes están ligadas por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$
Longitud del lado recto: $l = \frac{2b^2}{a}$	Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

2.2.2. Eje mayor paralelo al eje Y

La ecuación es:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \tag{9}$$

Y para esta elipse, sus elementos son:

focos en: $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$	Los vértices son $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$
La longitud del eje mayor es $2a$	La longitud de eje menor es $2b$
La longitud focal es $2c$	Las longitudes están ligadas por la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$
Longitud del lado recto: $l = \frac{2b^2}{a}$	Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Ejemplo: Los vértices de una elipse son $V(-3, 7)$ y $V'(-3, -1)$ y la longitud de cada lado recto es: $l = 2$. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución: Notamos que la parte x de ambos vértices es -3

3. Hipérbola

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados *focos* es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

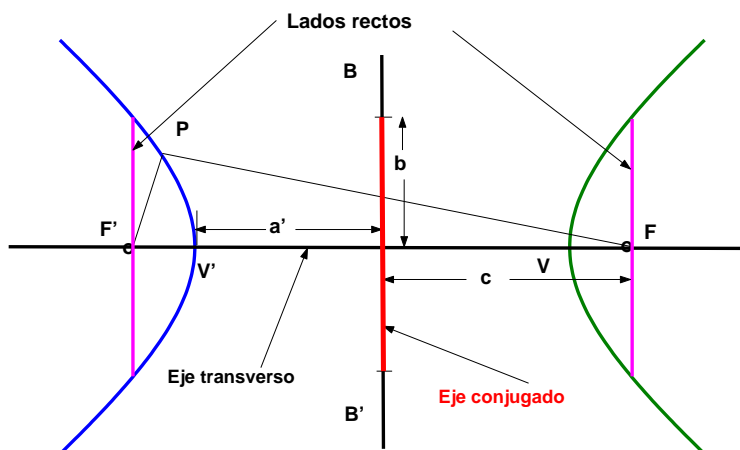


FIGURA 3: Elementos de una hipérbola

Se muestra en la figura 3 una porción de las dos ramas de la hipérbola. Se han marcado con $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ a los focos. La recta que pasa por los focos y que es el eje de simetría, se llama *Eje focal*. La hipérbola corta al eje focal en los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, que se llaman los *vértices*. La porción del eje focal comprendida entre los vértices se llama *eje transverso*. El punto medio C del eje transverso se llama *centro*. El eje perpendicular en el punto C al eje focal se llama *eje normal* y sobre este eje normal están los puntos $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ que son los extremos del llamado *eje conjugado*. La línea l perpendicular al eje focal y que toca a la hipérbola, pasando por el foco, se llama *lado recto*.

3.1. Con centro en el origen

3.1.1. Eje focal en el eje x

Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

Y sus elementos son:

Los focos están en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$	Los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$
La longitud del eje transverso es $2a$	La longitud del eje conjugado es $2b$
Las cantidades a, b y c están ligadas por la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$	
La longitud de los lados rectos es $l = \frac{2b^2}{c}$	La excentricidad es: $e = \frac{c}{a}$

3.1.2. Eje focal en el eje y

Su ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

Y sus elementos son:

Los focos están en $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$	Los vértices están en $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$
La longitud del eje transverso es $2a$	La longitud del eje conjugado es $2b$
Las cantidades a, b y c están ligadas por la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$	
La longitud de los lados rectos es $l = \frac{2b^2}{c}$	La excentricidad es: $e = \frac{c}{a}$

Ejemplo: Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$ y sus focos son los puntos $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. Hallar la ecuación, los ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Solución: Como los vértices y los focos están sobre el eje y , el eje focal coincide con el eje y . Además, el punto medio del eje transverso esta, evidentemente, en el origen, Por tanto, la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre los vértices es $2a$. Sabemos que la posición de uno de los vértices es $V(0, a) = V(0, 3)$, entonces vemos que $a = 3$ por lo que la longitud total del eje transverso es: $2a = 2(3) = 6$.

De la misma manera, sabemos que la distancia entre los focos es $2c$. La posición de uno de los focos es $F(0, c) = (0, 5)$, entonces $c = 5$.

Por otro lado, $2b$ es la longitud del eje conjugado, así que despejamos b de la relación entre longitudes:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 && , \text{ de donde} \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \\ b &= \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Como ya conocemos a y b , podemos escribir ahora la ecuación de nuestra hipérbola:

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

y la longitud del eje conjugado es $2b = 2(4) = 8$.

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

La longitud del lado recto es:

$$l = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} = \frac{2(16)}{3} = \frac{32}{3}$$

3.2. Con centro en $C(h, k)$

$$promedio = \frac{10 + 6 + 8}{3} = \frac{(E^2 + F^2 + G^2)}{3} = (E^2 + F^2 + G^2)/3 \quad (12)$$