
CAPÍTULO 5

Interferencias

Índice General

5.1. Consideraciones Generales	74
5.2. Condiciones para la Interferencia	78
5.3. Interferómetros de División de Frente de Onda . .	79
5.4. Películas Dieléctricas. Interferencia de dos Haces .	83
5.4.1. Franjas de Igual Inclinación	84
5.4.2. Franjas de Igual Espesor	86

Consideraciones Generales

La luz es, por supuesto, un fenómeno vectorial; los campos eléctricos y magnéticos son campos vectoriales. Una apreciación de este hecho es fundamental para cualquier tipo de entendimiento intuitivo de la óptica. No es necesario decir que hay muchas situaciones en las que el sistema óptico en particular está de tal manera configurado que la naturaleza vectorial de la luz es de poco significado práctico. Se deducirá por lo tanto las ecuaciones de interferencia básicas dentro del contexto del modelo vectorial, delineando después las condiciones bajo las cuales el tratamiento escalar es aplicable.

De acuerdo con el principio de superposición, la intensidad del campo eléctrico \vec{E} , en un punto en el espacio que proviene de los campos separados $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, de varias fuentes que contribuyen, está dada por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Una vez más se hace notar que la perturbación óptica, o campo luminoso \vec{E} , varía en un tiempo sumamente rápido, aproximadamente:

$$4,3 \times 10^{14} \text{ Hz a } 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz,}$$

haciendo que el campo real sea una cantidad prácticamente indetectable. Por otro lado, la irradiancia I puede ser medida directamente usando una gran variedad de sensores (por ejemplo, fotoceldas, bolómetros, emulsiones fotográficas u ojos). Realmente, si se va a estudiar la interferencia, entonces es mejor que se ataque el problema por medio de la irradiancia.

Gran parte del análisis que sigue se puede efectuar sin especificar la forma particular de los frentes de onda y los resultados son por consiguiente muy generales en su aplicabilidad. Sin embargo, con el propósito de simplificar, se considerarán dos fuentes puntuales S_1 y S_2 emitiendo ondas monocromáticas de la misma frecuencia en un medio homogéneo. Además, permítase que su separación a sea mucho más grande que λ . Colóquese el punto de observación P lo suficientemente lejos de las fuentes de tal forma que los frentes de onda en P sean planos. Por el momento se considerarán solamente ondas linealmente polarizadas de la forma:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1)$$

y

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2)$$

Anteriormente se vió que la irradiancia en P está dada por:

$$I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle$$

Puesto que solamente son concernientes las irradiancias relativas dentro del mismo medio, se despreciarán, al menos por el momento, las constantes y se pondrá:

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle.$$

Lo que se quiere decir por $\langle \vec{E}^2 \rangle$ es, por supuesto, el promedio en el tiempo de la magnitud de la intensidad del campo eléctrico al cuadrado o $\langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle$. Por consiguiente,

$$\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E},$$

donde ahora

$$\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

y por lo tanto:

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Tomando el promedio en el tiempo de ambos lados, la irradiancia queda:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (5.1)$$

siempre que:

$$I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle,$$

$$I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle$$

y

$$I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle.$$

La última expresión se conoce como *término de interferencia*. Para evaluarlo en este caso específico, se forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 &= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_1) \\ &\times \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 &= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} [\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1) \times \cos \omega t \\ &+ \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1) \sin \omega t] \times [\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2) \cos \omega t \\ &+ \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2) \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Recordando que el promedio en el tiempo de alguna función $f(t)$, tomado sobre un intervalo T , es:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'. \quad (5.3)$$

El período τ de las funciones armónicas es $2\pi/\omega$ y para la mayoría de los propósitos presentes $T \gg \tau$. En ese caso el coeficiente $1/T$ frente a la integral tiene un efecto dominante. Después de multiplicar y sacar el promedio, la ecuación (5.2) queda:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varepsilon_2),$$

donde se utilizó el hecho de que $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ y $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$. El término de interferencia es:

$$I_{12} = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta \quad (5.4)$$

y δ , igual a $\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right)$, es la *diferencia de fase* que proviene de combinar una diferencia de longitud de trayectoria y una diferencia de fase inicial. Obsérvese que si \vec{E}_{01} y \vec{E}_{02} (y por consiguiente \vec{E}_1 y \vec{E}_2) son perpendiculares, $I_{12} = 0$ y $I = I_1 + I_2$. Dos estados ortogonales \mathcal{P} tales se combinan para dar un estado \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{P} o \mathcal{E} , pero la distribución de densidad de flujo quedará inalterada.

La situación que casi siempre ocurre en el trabajo que sigue corresponde a \vec{E}_{01} paralelo a \vec{E}_{02} . en ese caso, la irradiancia se reduce al valor encontrado en el tratamiento escalar. Bajo esas condiciones:

$$I_{12} = E_{01} E_{02} \cos \delta.$$

Esto se puede escribir en una forma más conveniente notando que:

$$I_1 = \langle E_1^2 \rangle = \frac{E_{01}^2}{2}$$

y

$$I_2 = \langle E_2^2 \rangle = \frac{E_{02}^2}{2}$$

El término de interferencia queda:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

en donde la irradiancia total es:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (5.5)$$

En varios puntos en el espacio, la irradiancia resultante puede ser mayor, menor o igual a $I_1 + I_2$ dependiendo del valor I_{12} , es decir, dependiendo de δ . Un máximo en la irradiancia se obtiene cuando $\cos \delta = 1$, tal que:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

cuando

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

En este caso la diferencia de fase entre las dos ondas es un múltiplo entero de 2π , y las perturbaciones están *en fase*. Se habla de esto como *interferencia constructiva total*. Cuando $0 < \cos \delta < 1$ las ondas están *fuera de fase*, $I_1 + I_2 < I < I_{max}$ y el resultado se conoce como *interferencia constructiva*. En $\delta = \pi/2$, $\cos \delta = 0$, las perturbaciones ópticas están 90° fuera de fase y $I = I_1 + I_2$. Para $0 > \cos \delta > -1$ se tiene la condición de *interferencia destructiva*, $I_1 + I_2 > I > I_{min}$. El mínimo en la irradiancia resulta cuando las ondas están 180° fuera de fase, valles sobre crestas, $\cos \delta = -1$, y

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

Esto, por supuesto, ocurre cuando $\delta = \pm\pi, \pm3\pi \pm 5\pi, \dots$, y recibe el nombre de *interferencia destructiva total*.

Otro caso algo especial, aunque no muy importante aparece cuando las amplitudes de ambas ondas que llegan a P son iguales, es decir, $\vec{E}_{01} = \vec{E}_{02}$. Ya que las contribuciones a la irradiancia de ambas fuentes son entonces iguales, haciendo $I_1 = I_2 = I_0$. La ecuación (5.5) se puede ahora escribir como:

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (5.6)$$

de lo cual se deduce que $I_{min} = 0$ y $I_{max} = 4I_0$.

La ecuación (5.5) es igualmente válida para las ondas esféricas emitidas por S_1 y S_2 . Tales ondas se pueden expresar como:

$$\vec{E}_1(r_1, t) = \vec{E}_{01}(r_1)e^{i(kr_1 - \omega t + \varepsilon_1)}$$

y

$$\vec{E}_2(r_2, t) = \vec{E}_{02}(r_2)e^{i(kr_2 - \omega t + \varepsilon_2)}$$

Los términos r_1 y r_2 son los radios de los frentes de onda esféricos que se superponen en P , es decir, ellos especifican las distancias de las fuentes J . En este caso:

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

La densidad de flujo en la región que rodea a S_1 y S_2 ciertamente variará de punto a punto al variar $(r_1 - r_2)$. No obstante, del principio de conservación de la energía, se espera que el promedio espacial de I permanezca constante e igual al promedio de $I_1 + I_2$. El promedio espacial de I_{12} debe ser por lo tanto cero, una propiedad verificada por la ecuación (5.4) ya que el promedio del término del coseno es, en efecto, cero.

La ecuación (5.6) será aplicable cuando la separación entre S_1 y S_2 sea pequeña en comparación con r_1 y r_2 y cuando, además, la región de interferencia también sea pequeña en el mismo sentido. Bajo estas circunstancias \vec{E}_{01} y \vec{E}_{02} pueden considerarse independientes de la posición, es decir, constantes en la pequeña región examinada. Si las fuentes emisoras son de igual intensidad $\vec{E}_{01} = \vec{E}_{02}$, $I_1 = I_2 = I_0$ y se tiene:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} [k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]$$

Los máximos de irradiancia ocurren cuando:

$$\delta = 2\pi m$$

siempre que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Similarmente, los términos para los cuales $I = 0$, aparecen cuando:

$$\delta = \pi(2m + 1).$$

Estas expresiones se pueden reescribir de tal forma que la máxima irradiancia ocurre cuando:

$$(r_1 - r_2) = \frac{2\pi m + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{k} \quad (5.7)$$

y la mínima cuando

$$(r_1 - r_2) = \frac{\pi(2m + 1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{k}$$

Cualquiera de estas ecuaciones define una familia de superficies, cada una de las cuales es un hiperboloide de revolución. Los vértices de los hiperboloides están separados por distancias iguales a los lados derechos de las ecuaciones (5.7). Los focos están localizados en S_1 y S_2 . Si las ondas están en fase al salir del emisor $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$, y las ecuaciones (5.7) se simplifican a:

$$(r_1 - r_2) = \frac{2\pi m}{k} = m\lambda$$

$$(r_1 - r_2) = \frac{\pi(2m + 1)}{k} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

para irradiancia máxima y mínima, respectivamente. Las zonas claras y oscuras que se verían en una pantalla colocada en la región de interferencia se conocen como *franjas de interferencia*.

SECCIÓN 5.2

Condiciones para la Interferencia

Si el patrón de interferencia que corresponde a las ecuaciones (5.7) es observable, la diferencia de fase ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$) entre las dos fuentes debe permanecer bastante constante en el tiempo. Tales fuentes son coherentes. Dos haces que se superponen y que vienen de emisores separados interferirán, pero el patrón resultante no se sostendrá el tiempo suficiente para ser fácilmente observable. Una fuente típica contiene un gran número de átomos excitados, cada uno capaz de radiar un tren de onda aproximadamente por 10^{-8} s. Dos fuentes distintas por consiguiente podrían mantener sus fases relativas, en el mejor de los casos, 10^{-8} s. El patrón de interferencia resultante sería constante en espacio solamente durante ese lapso, antes de que varíe al cambiar la fase, y de ahí en adelante permanecería estable por otro momento, solamente para cambiar de nuevo y así sucesivamente. Por consiguiente, sería inútil intentar ver o fotografiar el patrón de interferencia resultante de dos lámparas. Se han usado dos láseres separados para generar patrones de interferencia. La forma más común de resolver el problema, como se verá, es hacer que una fuente se utilice para producir dos fuentes secundarias coherentes.

Si dos haces deben interferir para producir un patrón estable, deben tener casi la misma frecuencia. Una diferencia de frecuencia significativa resultaría en una diferencia de fase dependiente del tiempo, variando rápidamente el cual a su vez haría que I_{12} se promediase a cero durante el intervalo de detección.

Los patrones más claros existirán cuando las ondas que interfirieron tengan amplitudes iguales o casi iguales. Las regiones centrales de las franjas oscuras y claras corresponden entonces a interferencia completamente destructiva o constructiva, respectivamente, dando máximo contraste.

En la sección previa se supuso que dos vectores de perturbaciones ópticas superpuestos estaban linealmente polarizados y paralelos. No obstante, las fórmulas de la sección anterior se aplican también a situaciones más complicadas; realmente el tratamiento es aplicable sin importar el estado de polarización de las ondas. Para apreciar esto, es preciso recordar que cualquier estado de polarización se puede sintetizar en estados \mathcal{P} ortogonales. Para luz natural (no

polarizada) estos estados \mathcal{P} son mutuamente incoherentes, pero ello no representa ninguna dificultad particular.

Supóngase que cada onda tiene su vector de propagación en el mismo plano de tal forma se pueden marcar los estados \mathcal{P} ortogonales constitutivos con respecto a ese plano, es decir, \vec{E}_{\parallel} y \vec{E}_{\perp} , los cuales son paralelos y perpendiculares al plano respectivamente. Entonces, cualquier onda plana polarizada o no, se puede escribir en la forma $(\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp})$. Imagínese entonces que las sondas $(\vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\perp 1})$ y $(\vec{E}_{\parallel 2} + \vec{E}_{\perp 2})$ emitidas desde dos fuentes coherentes idénticas se superponen en la misma región del espacio. La distribución de densidad de flujo resultante consistiría de dos patrones de interferencia independientes, precisamente superpuestas, $\langle (\vec{E}_{\parallel 1} + \vec{E}_{\perp 1})^2 \rangle$ y $\langle (\vec{E}_{\parallel 2} + \vec{E}_{\perp 2})^2 \rangle$. Por consiguiente, puesto que se dedujeron las ecuaciones en la sección anterior, específicamente para luz lineal, ellas son aplicables también, para cualquier estado de polarización incluyendo luz natural.

Obsérvese que aunque $\vec{E}_{\perp 1}$ y $\vec{E}_{\perp 2}$ son siempre paralelas una a otra $\vec{E}_{\parallel 1}$ y $\vec{E}_{\parallel 2}$, las cuales están en el plano de referencia, no necesariamente lo son. Serán paralelas solamente cuando los dos haces son paralelos entre sí (es decir, $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$). La naturaleza vectorial inherente del proceso de interferencia, como se manifiesta en la representación del producto escalar (5.4) de I_{12} , no puede por consiguiente ignorarse. Como se verá, hay muchas situaciones prácticas en las que los dos haces son casi paralelos y para éstos la teoría escalar funciona perfectamente.

Fresnel y Arago hicieron un estudio extensivo de las condiciones bajo las cuales la interferencia de luz polarizada ocurre y sus conclusiones resumen algunas de las consideraciones anteriores. Las *leyes de Fresnel-Arago* son las siguientes:

1. Dos estados \mathcal{P} coherentes ortogonales no pueden interferir en el sentido de que $I_{12} = 0$ y no resulten franjas.
2. Dos estados \mathcal{P} coherentes y paralelos interfieren en la misma forma que la luz natural.
3. dos estados \mathcal{P} ortogonales constitutivos de la luz natural no pueden interferir para formar un patrón fácilmente observable aunque se giran para alinearlos. Este último punto es comprensible ya que estos estados \mathcal{P} son incoherentes.

SECCIÓN 5.3

Interferómetros de División de Frente de Onda

La ecuación

$$(r_1 - r_2) = m\lambda$$

determinaba las superficies de irradiancia máxima. Ya que la longitud de onda λ para la luz es muy pequeña, un gran número de superficies que corresponden a los valores más bajos de m existirán cerca y ambos lados del plano $m = 0$. Un número de franjas paralelas y bastante rectas por consiguiente aparecerán en una pantalla colocada perpendicularmente al plano ($m = 0$) y en la vecindad de él, y para este caso la aproximación $r_1 \approx r_2$ será válida. Si S_1 y S_2 son

entonces desplazados normalmente a la línea $\overline{S_1S_2}$, las franjas solamente serán desplazadas paralelamente a sí mismas. Prácticamente, dos rendijas angostas por consiguiente aumentarán la irradiancia dejando esencialmente inalterada, por otro lado, la región central del patrón de las dos fuentes puntuales.

Considérese una onda plana monocromática hipotética iluminando una rendija larga y angosta. De esa rendija primaria emergerá una onda cilíndrica; y supóngase que esta onda, a su vez, cae en dos rendijas S_1 y S_2 muy juntas, angostas y paralelas. Cuando existe simetría, los segmentos del frente de onda primario que llegan a las dos rendijas estarán exactamente en fase, y las rendijas constituirán dos fuentes secundarias coherentes. Se espera que donde quiera que las dos ondas que vienen de S_1 y S_2 se superpongan, ocurrirá interferencia (siempre que la diferencia de camino óptico sea menor que la longitud de coherencia, $c\Delta t$).

En una situación física realista la distancia entre cada una de las pantallas sería larga en comparación con la distancia a entre las dos rendijas, y todas las franjas estarían bastante cerca del centro O de la pantalla. La diferencia de camino entre los rayos a lo largo de $\overline{S_1P}$ y $\overline{S_2P}$ se puede obtener, con buena aproximación, bajando una perpendicular desde S_2 hasta $\overline{S_1P}$. Esta diferencia de camino está dada por:

$$(\overline{S_1B}) = (\overline{S_1P}) - (\overline{S_2P}) \quad (5.8)$$

o

$$(\overline{S_1B}) = r_1 - r_2.$$

Continuando con esta aproximación la diferencia de camino se puede expresar como:

$$r_1 - r_2 = a\theta \quad (5.9)$$

ya que $\theta \approx \sin \theta$.

Obsérvese que

$$\theta = \frac{y}{s} \quad (5.10)$$

y así

$$r_1 - r_2 = \frac{a}{s}y.$$

De acuerdo con la sección (5.11), la interferencia *constructiva* ocurrirá cuando:

$$r_1 - r_2 = m\lambda. \quad (5.11)$$

Entonces, de las últimas dos relaciones se obtiene:

$$y_m = \frac{s}{a}m\lambda. \quad (5.12)$$

5.3. INTERFERÓMETROS DE DIVISIÓN DE FRENTE DE ONDA

Esto da la posición de la m -ésima franja brillante sobre la pantalla si se cuenta el máximo 0 como la franja cero. La posición angular de la franja se obtiene sustituyendo la última expresión en la ecuación (5.10)

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \quad (5.13)$$

Esta relación se puede obtener directamente mediante métodos geométricos. Para el orden m -ésimo de interferencia, m longitudes de onda enteras deben caber dentro de la distancia $r_1 - r_2$. Por consiguiente, del triángulo S_1S_2B se obtiene:

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a}.$$

El espacio entre franjas en la pantalla se puede obtener fácilmente de la ecuación (5.12). La diferencia en las posiciones de dos máximos consecutivos es:

$$y_{m+1} - y_m = \frac{s}{a}(m+1)\lambda - \frac{s}{a}m\lambda$$

o

$$\Delta y = \frac{s}{a}\lambda. \quad (5.14)$$

Ya que este patrón es equivalente al obtenido para dos ondas esféricas superpuestas (al menos en la región $r_1 \approx r_2$), se puede aplicar la ecuación (5.6). Usando la diferencia de fase

$$\delta = k(r_1 - r_2).$$

La ecuación (5.6) se puede reescribir como:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

siempre que, por supuesto, los dos haces sean coherentes y tengan irradiancias iguales a I_0 . Con

$$r_1 - r_2 = y \frac{a}{s}$$

la irradiancia resultante queda:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda}.$$

Los máximos consecutivos están separados por la Δy dada en la ecuación (5.14).

Una observación visual directa del patrón de las franjas se puede hacer perforando dos pequeños agujeros en una tarjeta delgada. Los agujeros deben ser aproximadamente del tamaño del tipo de imprenta usado para el punto en esta página y con sus centros separados alrededor de 3 radios. Una lámpara en la calle, las luces de un automóvil o un semáforo en la noche, localizados a pocos metros de distancia servirá como fuente de ondas planas. Esta tarjeta debe ser colocada directamente frente y *muy cerca del ojo*. El patrón es mucho más fácil de observar usando rendijas, pero vale la pena ensayar los agujeritos.

Las microondas, debido a su gran longitud de onda, también ofrecen una forma fácil de observar la interferencia de doble rendija. Dos rendijas (por ejemplo, $\lambda/2$ de ancho por λ de largo, separados por 2λ) cortadas en un pedazo de lámina u hoja metálica servirán muy bien como fuente de onda secundaria.

La configuración interferométrica discutida antes, con fuentes puntuales o de rendija, se conoce como *experimento de Young*. El principio físico y las consideraciones matemáticas se aplican directamente a otros interferómetros de división de frente de onda. Entre los más comunes de ellos están el espejo doble de Fresnel, el prisma doble de Fresnel y el espejo de Lloyd.

El espejo doble de Fresnel consiste en dos espejos planos metalizados al frente e inclinados uno respecto al otro con un ángulo muy pequeño. Una porción del frente de onda cilíndrico proveniente de la rendija S se refleja en el primer espejo, mientras que otra porción del frente de onda se refleja en el segundo espejo. Un campo de interferencia existe en el espacio en la región donde las dos ondas reflejadas se superponen una sobre la otra. Las imágenes (S_1 y S_2) de la rendija S en los dos se pueden considerar como fuentes coherentes separadas, colocadas con una separación a . De la ley de la reflexión se deduce que $\overline{SA} = \overline{S_1A}$, $\overline{SB} = \overline{S_2B}$, de tal forma que $\overline{SA} + \overline{AP} = r_1$ y $\overline{SB} + \overline{BP} = r_2$. La diferencia de camino óptico entre los dos rayos es simplemente $r_1 - r_2$. Los máximos ocurren en $r_1 - r_2 = m\lambda$ como era el caso para el interferómetro de Young. De nuevo, la separación de las franjas está dada por:

$$\Delta y = \frac{s}{a}\lambda$$

donde s es la distancia entre el plano de las dos fuentes virtuales (S_1, S_2) y la pantalla. Nótese que el ángulo θ entre los espejos debe ser muy pequeño si los vectores de campo eléctrico para cada uno de los dos haces son paralelos o casi paralelos. Representétese por \vec{E}_1 y \vec{E}_2 las ondas de luz emitidas por las fuentes coherentes virtuales S_1 y S_2 . En cualquier instante de tiempo en el punto P en el espacio, cada uno de estos vectores se puede resolver en componentes, paralelas y perpendiculares al plano de la página. Con \vec{k}_1 y \vec{k}_2 paralelas a AP y BP respectivamente, debe ser evidente que las componentes \vec{E}_1 y \vec{E}_2 en el plano de la página se acercan al paralelismo solamente para θ pequeña.

El prisma doble de Fresnel o biprisma consiste en dos prismas unidos en las bases. Un frente de onda cilíndrico simple llega a ambos prismas. La porción superior del frente de onda se refracta hacia abajo, mientras que el segmento inferior se refracta hacia arriba. En la región de superposición ocurre la interferencia. Aquí de nuevo, existen dos fuentes virtuales, S_1 y S_2 , separadas por una distancia A la cual puede ser expresada en términos del ángulo α del prisma donde $s \gg a$. La expresión para la separación de las franjas es la misma que antes.

El último interferómetro de división de frente de onda que se considerará es el espejo de Lloyd. Consiste en una pieza plana de dieléctrico o metal que sirve como espejo, del cual se refleja una porción del frente de onda cilíndrico que sale de la rendija S . Otra porción del frente de onda procede directamente de la rendija a la pantalla. Para la separación a , entre las dos ondas coherentes, se toma la distancia entre la rendija real y su imagen S_1 en el espejo. El espacio entre las franjas está de nuevo dado por $\frac{s}{a}\lambda$. La característica que distingue a este dispositivo es que a incidencia rasante ($\theta_i \approx \pi/2$) el haz reflejado sufre un cambio de fase de 180° (hay que recordar que el coeficiente de reflexión para las amplitudes es entonces igual a -1). Con un cambio de fase adicional de $\pm\pi$.

$$\delta = k(r_1 - r_2) \pm \pi$$

y la irradiancia queda:

$$I = 4I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi a y}{s \lambda} \right).$$

El patrón de franjas para el espejo de Lloyd es complementario del de interferómetro de Young; el máximo de un patrón existe para valores de y que corresponden a los mínimos en el otro patrón. La orilla superior del espejo es equivalente a $y = 0$ y será el centro de una franja oscura en lugar del de una franja brillante como en el sistema de Young. La mitad inferior del patrón será obstruida por la presencia del espejo mismo. Considérese, entonces, qué pasaría si una hoja delgada de material transparente se colocara en la trayectoria de los rayos que viajan directamente a la pantalla. La hoja transparente tendría el efecto de aumentar el número de longitudes de onda en cada rayo directo. El patrón entero se movería hacia arriba hasta donde los rayos reflejados viajarían un poco más antes de interferir. Debido a la simplicidad obvia inherente de este sistema se ha encontrado útil en una región muy ancha del espectro electromagnético. Las superficies reflectoras reales han variado de cristal por rayos X, de vidrio común para luz, de pantallas de alambre para microondas, a un lago o incluso la ionosfera de la tierra para ondas de radio.

Todos los interferómetros anteriores se pueden demostrar muy fácilmente. La fuente de luz debe ser fuerte; si no se dispone de un láser, una lámpara de descarga o un arco de carbón seguida por una celda de agua, para enfriar las cosas un poco, trabajaría satisfactoriamente. La luz no es monocromática, pero las franjas, que serán coloreadas, aún se pueden observar. Una aproximación satisfactoria a la luz monocromática se puede obtener con un filtro colocado frente al arco. Un láser He-Ne de baja potencia es quizá la fuente más fácil para trabajar y con ella no se necesitará una celda de agua o filtro.

SECCIÓN 5.4

Películas Dieléctricas. Interferencia de dos Haces

Los efectos de la interferencia se observan en materiales transparentes, el espesor de los cuales varía en un amplio rango. El rango de valores va desde películas con espesores menores que la longitud de onda de la luz (por ejemplo, para luz verde λ_0 es aproximadamente igual a $1/150$ el espesor de esta hoja de papel) hasta placas con varios centímetros de espesor. Se dice que una capa de algún material es una *película delgada* para cierta longitud de onda de radiación electromagnética cuando su espesor es del orden de la longitud de onda. A comienzos de la década de los cuarenta, el fenómeno asociado con películas delgadas dieléctricas, aunque era bien conocido, había tenido aplicaciones limitadas. El despliegue espectacular de colores que aparece en las capas de aceite y en las pompas de jabón, aunque estética y teóricamente son agradables, fueron prácticamente sólo bellas curiosidades.

El advenimiento de técnicas adecuadas de deposición al vacío en la década de 1930 trajo consigo la capacidad de producir recubrimientos precisamente controlados a escala comercial y con eso, a su vez un renacimiento del interés. Durante la Segunda Guerra Mundial, ambos lados encontraban al enemigo con una variedad de dispositivos ópticos recubiertos y alrededor de 1960 se usaban profusamente recubrimientos de multicapas.

5.4.1
Franjas de
Igual
Inclinación

Inicialmente, se considerará el caso sencillo de una placa transparente y paralela de material dieléctrico con un espesor d . Supóngase que la película es no absorbente y que los coeficientes de reflexión de amplitud en las caras son tan bajos, que únicamente se necesitan considerarse los dos primeros haces reflejados E_{1r} y E_{2r} (ambos han sufrido sólo una reflexión). En la práctica los haces reflejados varias veces (E_{3r} , etc.) por lo general decrecen muy rápidamente, como puede ser demostrado para las interfases entre aire-agua y aire-vidrio. Por el momento, se considerará a S como una fuente puntual monocromática. La película sirve como un dispositivo de división de amplitud, tal que E_{1r} y E_{2r} pueden ser considerados como provenientes de dos fuentes coherentes virtuales colocadas atrás de la película. Los rayos reflejados son paralelos cuando dejan la película y se pueden unir en un punto P sobre el plano focal de un objetivo de telescopio o sobre la retina del ojo cuando está enfocado al infinito. La diferencia de camino óptico para los dos primeros rayos reflejados está dada por:

$$\Lambda = n_f [(\overline{AB}) + (\overline{BC})] - n_1 (\overline{AD})$$

y puesto que $(\overline{AB}) = (\overline{BC}) = d / \cos \theta_t$,

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - n_1 (\overline{AD}).$$

Ahora, para encontrar una expresión para (\overline{AD}) , se escribe:

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC}) \sin \theta_i;$$

si se hace uso de la ley de Snell, esto se transforma en:

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC}) \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_i,$$

donde

$$(\overline{AC}) = 2d \tan \theta_t. \tag{5.15}$$

La expresión para Λ ahora es:

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} (1 - \sin^2 \theta_t)$$

o finalmente

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t. \tag{5.16}$$

La diferencia de fase correspondiente y asociada con la diferencia de camino óptico es entonces justamente el producto del número de propagación del vacío y Λ , es decir, $k_0 \Lambda$. Si la película está sumergida en un solo medio, el índice de refracción se puede escribir simplemente como $n_1 = n_2 = n$. Hay que darse cuenta, por supuesto, que n puede ser menor que n_f , como en el caso de la pompa de jabón en aire; o mayor que n_f , como con una capa de aire entre dos placas delgadas de vidrio. En cualquier caso habrá un corrimiento adicional en la fase como resultado de las reflexiones mismas. Hay que recordar que, independientemente de la polarización de la luz incidente, los dos haces, uno reflejado interna y el otro externamente, sufrirán un *cambio relativo de fase* de π radianes. De acuerdo a ello:

$$\delta = k_0 \Lambda \pm \pi$$

y más explícitamente

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_t \pm \pi \quad (5.17)$$

o

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} \sqrt{n_f^2 - n^2 \sin^2 \theta_i} \pm \pi \quad (5.18)$$

El signo de corrimiento de fase no es relevante, de tal modo que se escogerá el signo negativo para hacer las ecuaciones un poco más simples. En luz reflejada un máximo de interferencia, un punto brillante, aparecerá en P cuando $\delta = 2m\pi$, o sea, un múltiplo par de π . En ese caso la ecuación (5.17) puede ser arreglada para obtener

$$d \cos \theta_t = (2m + 1) \frac{\lambda_f}{4} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{máximos} \quad (5.19)$$

donde se ha usado el hecho de que $\lambda_f = \lambda_0/n_f$. Esto también corresponde a mínimos en la luz transmitida. Los mínimos de interferencia en luz reflejada (máximos en transmitida) resultan cuando $\delta = (2m \pm 1)\pi$, es decir, múltiplos impares de π . Para tales casos la ecuación (5.17) da:

$$d \cos \theta_t = 2m \frac{\lambda_f}{4}. \quad (5.20)$$

El hecho de que aparezcan múltiplos pares e impares de $\lambda_f/4$ en las ecuaciones (5.19) y (5.20) es bastante significativo, como se verá posteriormente. Se puede, por supuesto, tener una situación donde $n_1 > n_f > n_2$ o donde $n_1 < n_f < n_2$ como en el caso de una película de fluorita depositada sobre un elemento óptico sumergido en aire. El corrimiento de fase en π no se presentaría y las ecuaciones anteriores tendrían que ser modificadas apropiadamente.

Si la lente empleada para enfocar los rayos tiene una abertura pequeña, las franjas de interferencia aparecerán sobre una porción pequeña de la película. Solamente los rayos que salen de la fuente puntual, los cuales son reflejados directamente hacia la lente, podrán ser observados. Para una fuente extensa, la luz llegará a la lente desde varias direcciones y el patrón de franjas se extenderá para cubrir una área mayor de la película.

El ángulo θ_i o equivalentemente θ_t , determinado por la posición de P , a su vez controlará δ . Las franjas que aparezcan en los puntos P_1 y P_2 son, correspondientemente, conocidas como *franjas de igual inclinación*. Hay que recordar que cada fuente puntual sobre la fuente extendida es incoherente con respecto a las otras.

Obsérvese que conforme la película se hace más gruesa, la separación (\overline{AC}) entre E_{1r} y E_{2r} también aumenta ya que:

$$(\overline{AC}) = 2d \tan \theta_t.$$

Cuando sólo uno de los rayos puede entrar a la pupila del ojo, el patrón de interferencia desaparecerá. La lente más grande de un telescopio puede ser usada entonces para atrapar ambos rayos, haciendo una vez más posible la observación

del patrón. La separación también puede disminuirse reduciendo θ_t y por lo tanto θ_i , o sea, observando la película casi a incidencia normal. Las franjas de igual inclinación observadas en esta forma para placas gruesas se conocen como *franjas de Haidinger*. Con una fuente extendida ellas consisten de una serie de bandas circulares concéntricas centradas sobre la perpendicular del ojo a la película. Conforme el observador se mueve, el patrón también lo hace.

5.4.2 Franjas de Igual Espesor Existe toda una clase de franjas de interferencia para las cuales el espesor óptico, $n_f d$, es el parámetro dominante más que θ_i . Estas se llaman *franjas de igual espesor*. Bajo iluminación con luz blanca la iridiscencia de pompas de jabón, capas de aceite (con unas cuantas longitudes de onda gruesa), e incluso superficies de metal oxidado, todas ellas son resultados de variaciones en el espesor de la película. Las bandas de interferencia de este tipo son análogas al contorno de líneas de altura constante de un mapa topográfico. Cada franja es el lugar geométrico de todos los puntos en la película para el cual el espesor óptico es constante. En general, n_f no varía, de tal modo que las franjas en realidad corresponden a regiones de igual espesor en la película. Como tal, ellas pueden ser bastante útiles para determinar aspectos diferentes de la superficie de elementos ópticos: lentes, prismas, etc. Por ejemplo, una superficie que va a ser examinada se puede poner en contacto con un *plano óptico*.¹ El aire entre el espacio de las dos superficies genera un patrón de interferencia de películas delgadas. Si la superficie bajo prueba es plana, una serie de bandas rectas e igualmente espaciadas indicará una película de aire en forma de cuña, resultando proveniente, generalmente, del polvo entre los planos. Dos piezas de placas de vidrio separadas en un extremo por una tira de papel formarán una cuña satisfactoria con la cual se observarán estas bandas.

Cuando se ve casi a incidencia normal, los contornos provenientes de una película no uniforme se llaman *franjas de Fizeau*. Para una cuña delgada de ángulo pequeño α , la diferencia de camino óptico entre los dos rayos reflejados puede ser aproximada por la ecuación (5.16), donde d es el espesor para un punto particular, es decir:

$$d = x\alpha$$

Para ángulos pequeños de θ_i la condición para interferencia máxima es:

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 = 2n_f d_m$$

o

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 = 2\alpha x_m n_f.$$

Puesto que $n_f = \lambda_0/\lambda_f$, x_m puede escribirse como:

$$x_m = \left(\frac{m + \frac{1}{2}}{2\alpha}\right) \lambda_f.$$

¹Una superficie se dice que está ópticamente plana cuando se desvía no más de $\lambda/4$ respecto a un plano perfecto. En el pasado, los mejores planos fueron hechos de cuarzo fundido transparente. Ahora hay disponibles materiales de vidrio-cerámica (por ejemplo, CER-VIT) que tiene coeficientes de expansión térmica muy pequeños (alrededor de un sexto de los de cuarzo). Se pueden hacer planos individuales de $\lambda/200$ o un poco mejores.

5.4. PELÍCULAS DIELECTRICAS. INTERFERENCIA DE DOS HACES

Los máximos ocurren a distancias del vértice dadas por $\lambda_f/4\alpha$, $3\lambda_f/4\alpha$, etc., y las franjas consecutivas están separadas por una distancia Δx , dada por:

$$\Delta x = \frac{\lambda_f}{2\alpha}$$

Obsérvese que la diferencia de espesor de la película entre máximos adyacentes es simplemente $\lambda_f/2$. Puesto que el haz reflejado en la superficie inferior cruza la película dos veces ($\theta_i \approx \theta_t \approx 0$), los máximos adyacentes difieren en longitud de camino óptico por λ_f . También se observa que el espesor de la película para varios máximos está dado por:

$$d_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_f}{2}$$

el cual es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda. Cruzando la película dos veces se obtiene un cambio de fase de π el cual, cuando se suma al corrimiento de π resultante de la reflexión, pone a los dos rayos en fase. Cuando una película de jabón se ilumina con luz blanca las bandas son de varios colores. La región negra en la parte superior es una porción donde el espesor de la película es menor que $\lambda_f/4$. Dos veces esto, más corrimiento adicional de $\lambda_f/2$ debido a la reflexión, es menor que una longitud de onda completa. Los rayos reflejados, por lo tanto, están fuera de fase. Como el espesor decrece aún más, la diferencia de fase total se aproxima a π . La irradiancia para el observador alcanza un mínimo (5.5) y la película aparece negra en luz reflejada.²

Si se presionan juntos dos portaobjetos de microscopio bien limpios. La película de aire encerrada entre ambos generalmente no será uniforme. con la iluminación ordinaria de una habitación, una serie de bandas irregulares y coloreadas (franjas de igual espesor) serán claramente visibles sobre la superficie. Los portaobjetos (láminas delgadas de vidrio) se distorsionarán si se someten a presión y por lo tanto las franjas se moverán y cambiarán. Es más, si las dos piezas de vidrio son presionadas juntas en un punto, por ejemplo, empleando la punta de un lápiz, se formará alrededor de ese punto una serie de franjas concéntricas, casi circulares. Conocido como anillos de Newton.³ Colocando una lente sobre un plano óptico e iluminando a incidencia normal con luz cuasimonocromática, la cantidad de uniformidad en el patrón de círculos concéntricos es una medida del grado de perfección en la forma de la lente. Siendo R el radio de curvatura de una lente convexa, la relación entre la distancia x y el espesor d de la película está dada por:

$$x^2 = R^2 - (R - d)^2,$$

o más simplemente por:

$$x^2 = 2Rd - d^2$$

²El corrimiento relativo π de fase entre las reflexiones interna y externa es indispensable si la densidad de flujo reflejada tiende a cero suavemente, conforme la película se hace más delgada y finalmente desaparece.

³Robert Hooke (1635-1703) e Isaac Newton, ambos en forma independiente, estudiaron una gama de fenómenos en películas delgadas como pompas de jabón hasta películas de aire entre lentes. Citando el libro *Opticks* de Newton:

Tomé dos objetos de vidrio, el uno una lente plano-convexa para un telescopio de catorce pies, y el otro una lente doble-convexa para uno de quince pies; después de esto, la otra con su lado plano hacia abajo, las presioné lentamente hasta hacer aparecer colores en forma sucesiva que salían de en medio de los círculos.

Puesto que $R \gg d$ esto se convierte en:

$$x^2 = 2Rd.$$

Nuevamente se aproximará suponiendo que se necesita únicamente examinar los primeros dos haces reflejados E_{1r} y E_{2r} . El m -ésimo orden de interferencia para un máximo ocurrirá en la película delgada cuando su grueso esté de acuerdo con la relación:

$$2n_f d_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0.$$

El radio del m -ésimo anillo brillante se encuentra por lo tanto combinando las dos últimas expresiones para obtener:

$$x_m = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_f R}. \quad (5.21)$$

Igualmente, el radio del m -ésimo anillo negro es:

$$x_m = \sqrt{m \lambda_f R}. \quad (5.22)$$

Si las dos piezas de vidrio están en buen contacto (sin polvo), la franja central en ese punto ($x_0 = 0$) claramente será el mínimo de orden cero, un resultado comprensible puesto que d se hace cero en ese punto. En luz transmitida, el patrón observado será el complementario del de luz reflejada discutido antes, de tal modo que el centro aparecerá ahora brillante.

Los anillos de Newton, que son franjas de Fizeau, pueden distinguirse del patrón circular de franjas de Haidinger por la manera como los diámetros de los anillos varían con el orden m . La región central en el patrón de Haidinger corresponde al valor máximo de m mientras que justamente lo opuesto se aplicará a los anillos de Newton.

Un taller de óptica en el negocio de producción de lentes tendrá un conjunto de precisas placas esféricas de referencia o medidores. Un diseñador puede entonces especificar la precisión de la superficie de una lente nueva en términos del número y regularidad de los anillos de Newton, los cuales serán observados con un instrumento de prueba particular. Se debe mencionar que el uso de placas de prueba en la manufactura de lentes de alta calidad da lugar a técnicas mucho más complicadas incluyendo interferómetros de láser.

CAPÍTULO 6

Difracción

Índice General

6.1. Difracción de Fraunhofer por una Rendija	90
---	----

Difracción de Fraunhofer por una Rendija

Considérese que se ilumina una pantalla con un foco puntual y coherente S , de longitud de onda λ y se interpone entre dicho foco y la pantalla un diafragma formado por una rendija de anchura a , de manera que la distancia L entre el diafragma con la rendija y la pantalla sea mucho mayor que la anchura de la rendija a .

Hechas estas consideraciones y teniendo en cuenta que la luz presenta dos comportamientos muy distintos la pregunta es ¿se observará en la pantalla lo mismo si es uno u otro el modo de interacción de la luz? Pues bien, dependiendo de la naturaleza que supongamos para la luz dos son los posibles resultados de este experimento, que se describirán a continuación.

Atendiendo exclusivamente a la naturaleza corpuscular de la luz esto es lo que se debería ocurrir: Los fotones se propagan en todas direcciones desde el foco puntual S , extendiéndose por todo el espacio; algunos de ellos viajarán en dirección a la pantalla, pero al estar interpuesto el diafragma entre el foco y la pantalla parte de estos últimos se pegarán contra la placa del diafragma y ahí finalizará su viaje, de manera que sobre la pantalla se proyectará la sombra del diafragma; sin embargo, otros (los que salen del foco S formando un pequeño ángulo) conseguirán pasar a través de la rendija y llegarán a la pantalla iluminándola. Según esta descripción el resultado final que cabe esperar es que se observe una zona iluminada semejante a la abertura, con contornos nítidos y bien delimitados entre la luz y la sombra.

Sin embargo si se atiende a la naturaleza ondulatoria de la luz, el estudio del fenómeno es más complicado, pues debería ocurrir lo siguiente: Un frente de ondas esférico se propaga desde el foco puntual a través del espacio, si además el foco puntual está alejado del diafragma y la rendija de éste es relativamente pequeña, se puede considerar que el frente de ondas incidente sobre la rendija es plano. De acuerdo con el principio de Huygens, cada punto sobre el frente de ondas realiza el mismo papel que un foco puntual, emitiendo a su vez, frentes de onda esféricos. Estos nuevos frentes de ondas producidos en la rendija están destinados a interactuar unos con otros. Se producirán fenómenos de interferencia en los cuales unos frentes de ondas al interferir con otros se reforzarán (interferencia constructiva) mientras que en otros casos se debilitarán (interferencia destructiva).

La interferencia constructiva máxima entre dos frentes se producirá cuando ambos frentes estén en fase, o lo que es lo mismo, cuando en las ondas de cada frente coinciden espacialmente crestas y nodos; en este caso las amplitudes de las ondas se sumarán y la amplitud resultante será máxima. La condición de interferencia constructiva entre dos frentes de ondas es que el ángulo de desfase entre ambos sea 0 o $2\pi m$, siendo m un número entero. Toda interferencia que se produzca entre dos frentes de ondas diferente de la descrita dará lugar a ondas con amplitud menor que la máxima, pudiendo incluso darse extinciones en el caso particular de que los frentes que interfieran estén desfasados en media longitud de onda, (cuando las crestas de las ondas de un frente coinciden espacialmente con los valles de las ondas de otro frente) en este caso la suma de las ondas de dichos frentes dan lugar a amplitudes de radiación mínimas, que se conoce como interferencia destructiva. La condición de interferencia destructiva

entre dos frentes de ondas es que el ángulo de desfase entre ambos sea π o πm , siendo m un número entero.

Para analizar la distribución de la intensidad luminosa en la pantalla tras las interferencias de los frentes de onda procedentes de la rendija, considérese un punto genérico de la pantalla P situado en ella, de manera que el tren de ondas procedente de uno de los focos se propaga hasta P formando un ángulo θ con respecto a la normal a la rendija. Puesto que la rendija es pequeña y la pantalla se encuentra muy alejada del diafragma, se puede considerar que los rayos (o mejor dicho, las líneas directrices a lo largo de las cuales se propagan las ondas luminosas) que llegan al punto P de la pantalla salen paralelos entre sí de los focos puntuales situados en la rendija. Considérese también que la rendija de anchura a se divide en N subintervalos iguales tales que en el medio de cada subintervalo haya un foco puntual emisor de ondas luminosas. Si se denota por d a la distancia entre dos focos puntuales adyacentes y puesto que la anchura de la rendija es a , resulta que la distancia de separación d entre dos focos adyacentes es $d = a/N$. Esta distancia de separación entre los focos hace que exista una diferencia de trayectos entre las ondas que de ellos salen hacia el punto P , siendo, a su vez, esta diferencia de trayectos la causa de que entre estas ondas haya una diferencia de fase dada por:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (6.1)$$

Se puede calcular la amplitud de la radiación en el punto P , para el cual las ondas procedentes de dos fuentes adyacentes difieran en una fase igual a δ . La siguiente figura muestra el diagrama de fasores para la suma de N ondas procedentes de los N focos puntuales que difieren de fase de la primera onda en $\delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$. Cuando N es muy grande y δ muy pequeña, el diagrama de fasores es aproximadamente un arco de circunferencia, pero en cualquier caso se puede escribir $\phi = (N-1)\delta$, siendo ϕ la diferencia de fase existente entre la onda del primer foco y la onda del último foco. La amplitud de la radiación resultante en el punto genérico P es E_θ , que resulta ser la longitud de la cuerda de este arco, y se calcula en función de la diferencia de fases entre la onda del primer foco y la onda del último foco.

Del anterior diagrama de fasores se tiene:

$$E_\theta = 2r \sin \frac{1}{2}\phi \quad (6.2)$$

Donde r es el radio del arco, que puede calcularse en función de la longitud del arco y el ángulo de desfase ϕ entre la primera y última ondas.

$$r = \frac{NE_0}{\phi} \quad (6.3)$$

Donde E_0 es la amplitud de la radiación de cada foco independiente de los demás. Sustituyendo esta expresión en la precedente se obtiene:

$$E_\theta = 2 \frac{NE_0}{\phi} \sin \frac{1}{2}\phi \Rightarrow E_\theta = \frac{NE_0}{\frac{1}{2}\phi} \sin \frac{1}{2}\phi \quad (6.4)$$

La amplitud máxima de la radiación (y por tanto su intensidad) se dará en aquel punto en el que todas las ondas interfieran constructivamente, de manera que se satisfaga que el desfase de todas las ondas es 0, situación que se da cuando $\theta = 0$ y en este caso la amplitud máxima es NE_0 , y puesto que la intensidad de la radiación en cualquier punto de la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud de la radiación incidente en dicho punto, se obtiene la siguiente expresión para la intensidad de la radiación en el punto genérico P :

$$\begin{aligned} \begin{cases} I_{max} & \propto (NE_0)^2 \\ I_\theta & \propto E_\theta^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{I_\theta}{I_{max}} = \frac{E_\theta^2}{(NE_0)^2} \Rightarrow I_\theta = I_{max} \frac{E_\theta^2}{(NE_0)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow I_\theta = I_{max} \frac{1}{(NE_0)^2} \left(\frac{NE_0}{\frac{1}{2}\phi} \sin \frac{1}{2}\phi \right)^2 \end{aligned}$$

es decir:

$$I_\theta = I_{max} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \quad (6.5)$$

El segundo factor del segundo miembro no hace más que modular la intensidad máxima I_{max} , ya que toma valores entre 0 y 1 dependiendo del desfase ϕ entre la primera y última onda. El desfase ϕ depende del desfase existente entre dos ondas de dos focos adyacentes, que a su vez, depende del ángulo θ formado por la línea de propagación de las ondas hasta un punto P en la pantalla y la normal a la rendija. Esta dependencia de la intensidad con el ángulo θ da lugar a máximos y mínimos de difracción sobre la pantalla. A continuación se hará una discusión acerca de las distintas situaciones que se pueden dar según la anterior expresión:

1. *Intensidad mínima.* El valor mínimo posible de la intensidad en un punto P de la pantalla es $I_\theta = 0$. La situación de intensidad mínima se produce cuando el segundo factor de la expresión general de la intensidad vale 0, que se produce cuando $\phi = 2\pi m$, como bien puede comprobarse tras sustituir dicho valor. Como el desfase entre dos ondas adyacentes y el desfase entre las ondas del primer y último foco está relacionadas por $\phi = (N-1)\delta$, se llega a la conclusión de que $\phi = 2\pi m$ se cumple cuando $\delta = 2\pi m / (N-1) \approx 2\pi m / N$ (cuando N es grande). Esto significa que todos los fasores se hallan formando un polígono regular cerrado. Por otro lado, como el desfase entre dos ondas adyacentes está relacionado con el ángulo θ por $\delta = 2\pi / \lambda \cdot d \sin \theta$, ocurre que la situación $\delta = 2\pi m / N$ se da cuando $a \sin \theta = m\lambda$:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow \frac{2\pi m}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow m\lambda = Nd \sin \theta$$

Puesto que $d = a/N$ se obtiene finalmente:

$$a \sin \theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.6)$$

Todo punto P de la pantalla situado de manera que forme un ángulo θ con respecto a la normal a la rendija, y verifique la expresión anterior se halla en oscuridad, es decir:

$$I_\theta = 0 \quad (6.7)$$

2. *Máximos relativos de intensidad.* En los puntos P de la pantalla en los que no se cumpla la anterior condición es evidente que no habrá oscuridad. En dichos puntos incidirá siempre algo de radiación, aunque sea muy poca, y el valor de su intensidad oscilará entre $0 < I_\theta \leq I_{max}$. Esta situación se produce cuando el segundo factor de la expresión general de la intensidad vale entre 0 y 1, que se produce cuando $\phi \neq 2\pi m$. De todos los valores posibles que puede tomar ϕ , existen algunos para los que la intensidad en la pantalla presenta máximos relativos. Estos máximos relativos aparecen cuando $\phi = 2\pi(m + \frac{1}{2})$. Como el desfase entre dos ondas adyacentes y el desfase entre las ondas del primer y último foco está relacionadas por $\phi = (N - 1)\delta$, se llega a la conclusión de que $\phi = 2\pi(m + \frac{1}{2})$ se cumple cuando $\delta = 2\pi(m + \frac{1}{2})/(N - 1) \approx 2\pi(m + \frac{1}{2})/N$ (cuando N es grande). Esto significa que todos los fasores se hallan completando m circunferencias y media, aproximadamente. Por otro lado, como el desfase entre dos ondas adyacentes está relacionado con el ángulo θ por $\delta = 2\pi/\lambda \cdot d \sin \theta$, ocurre que la situación $\delta = 2\pi(m + \frac{1}{2})/N$ se da cuando $a \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow \frac{2\pi(m + \frac{1}{2})}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda = Nd \sin \theta$$

Puesto que $d = a/N$ se obtiene finalmente:

$$a \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Todo punto P de la pantalla situado de manera que forme un ángulo θ con respecto a la normal a la rendija, y verifique la expresión anterior se halla iluminado con la siguiente intensidad:

$$I_\theta = I_{max} \left[\frac{1}{(m + \frac{1}{2}) \pi} \right]^2 \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.9)$$

Estos máximos relativos reciben el nombre de máximos secundarios de difracción, lo hace suponer que debe existir un máximo principal. Pues bien, es a este máximo principal al que corresponde la situación de iluminación con intensidad máxima en la pantalla.

3. *Intensidad máxima.* El valor máximo posible de la intensidad en un punto P de la pantalla es $I_\theta = I_{max}$. La situación de intensidad máxima se produce cuando el segundo factor de la expresión general de la intensidad vale 1, que se produce cuando $\phi = 0$, como bien puede comprobarse tras sustituir dicho valor y eliminar previamente la indeterminación tipo $\frac{0}{0}$ mediante la regla de L'Hôpital. Como el desfase entre dos ondas adyacentes y el desfase entre las ondas del primer y último foco está relacionadas por $\phi = (N - 1)\delta$, se llega a la conclusión de que $\phi = 0$ se cumple cuando $\delta = 0$. Esto significa que todos los fasores están en línea, o lo que es lo mismo, que las ondas procedentes de todos los focos están en fase. Por otro lado, como el desfase entre dos ondas adyacentes está relacionado con el ángulo θ por $\delta = 2\pi/\lambda \cdot d \sin \theta$, ocurre que la situación $\delta = 0$ se da cuando:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow 0 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Que ocurre cuando:

$$\theta = 0^\circ \quad (6.10)$$

Y como se decía, la intensidad en este caso es:

$$I_\theta = I_{max} \quad (6.11)$$

Todo punto P de la pantalla situado de manera que forme un ángulo θ igual a 0 con respecto a la normal a la rendija, se halla iluminado por radiación de intensidad máxima igual a I_{max} (y amplitud máxima NE_0).

La distancia existente Δy entre el máximo principal y el primer mínimo de difracción está relacionada con el ángulo θ y la distancia L que separa la rendija de la pantalla por:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{L}$$

Puesto que la pantalla está bastante alejada del diafragma, el ángulo θ es muy pequeño y puede hacerse la aproximación $\tan \theta \approx \sin \theta$, de manera que la anterior expresión se convierte en:

$$\sin \theta = \frac{\Delta y}{L}$$

Sustituyendo el valor de $\sin \theta$ de la anterior ecuación en la expresión que caracteriza los mínimos de difracción, se obtiene finalmente:

$$\Delta y = \frac{L\lambda}{a} \quad (6.12)$$

Finalmente, la descripción del fenómeno que se observaría es la siguiente: la mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en un máximo central de difracción ancho, aunque, existen bandas de máximos secundarios más pequeños a cada lado del máximo central. Para una longitud de onda determinada λ , la anchura del máximo central varía en razón inversa con la anchura de la rendija. Es decir, si se aumenta la anchura de la rendija a , disminuye el ángulo θ en que la intensidad es por primera vez nula, originándose un máximo de difracción central más estrecho. Inversamente, si disminuye la anchura de la rendija, aumenta el ángulo correspondiente al primer mínimo, dando así un máximo central de difracción más ancho. Cuando la rendija es muy pequeña, no existen puntos de intensidad nula en el diagrama, pues en este caso la rendija actúa como una fuente lineal, radiando energía luminosa esencialmente por igual en todas direcciones. Si, por el contrario, la rendija es muy ancha (mucho mayor que la longitud de onda de la radiación), simplemente no se observarán los fenómenos de interferencia y difracción.

Como puede verse, el tamaño de los objetos que interaccionan con la luz influye en el comportamiento de ésta, mostrándose fundamentalmente como corpúsculos (fotones) con objetos macroscópicos, y como ondas con objetos que tienen un tamaño similar a la longitud de onda de la luz.