Técnicas de integración

Tercer parcial

Enrique Morales Rodríguez

enmora@siu.buap.mx

Resumen

La ultima parte del curso de *matemáticas VI* está destinada al cálculo integral. Para ello se disponen estas notas en donde se abarcará desde el cálculo de integrales indefinidas básicas, llamada "integración elemental", con las que se usan tablas, hasta el método de integral por fracciones parciales, pasando por el cambio de variable, la integración por partes y las integrales trigonométricas (que incluye la sustitución trigonométrica). Los siguientes temas serían los de integración numérica, pero en el presente curso no se llega hasta ahí.

Índice

1. Integración elemental **2**

2. Cambio de variable **2**

3. Integración por partes **3**

4. Integrales trigonométricas **6**
4.1. Sustitución trigonométrica 7

5. Integración por fracciones parciales **9**
5.1. Factores lineales en el denominador 10
5.1.1. Caso 1 10
5.1.2. Caso 2. 10

1. Integración elemental

Ya hemos visto la integración de potencias de x. En esta parte del curso, veremos las integrales que a continuación se enumeran:

Sean x, n y c, cualquier número real. (tabla de fórmulas de integración, pag. 460 del *Swokowski*)

$$\int u^n = 6\tfrac{u^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{u} = \ln u \tag{2}$$

$$\int e^u = e^u \tag{3}$$

$$\int a^u = \frac{1}{\ln a} a^u \tag{4}$$

$$\int \cos u = \operatorname{sen} u \tag{5}$$

$$\int \operatorname{sen} u = -\cos u \tag{6}$$

Etcétera.

2. Cambio de variable

El cambio de variable[1] consiste en encontrar una función $u(x)$ como si fuera una variable u que nos provocará que de una función complicada obtengamos una más sencilla de integrar, regresando al final a nuestra consabida variable x.

Ejemplo: Hallar

$$\int \underbrace{(x^2+1)^3}_{1^{\text{a}}parte}\underbrace{(2x)\,\mathrm{d}x}_{2^{\text{a}}parte}$$

Solución.- En este caso, para fines didácticos, hemos marcado dos partes de la integral.

Hacemos $u = x^2 + 1$, tomando la expresión dentro del paréntesis de la primera parte de la integral, entonces, derivando después ambos extremos del signo "=", obtenemos:

$$\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ \mathrm{d}u &= (2x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

[1] En algunos textos, como el *"Cálculo"* de Serge Lang, Ed. Addison-Wesley, U.S.A.,1990, lo llaman simplemente *sustitución*

y vemos que hemos obtenido la segunda parte de la integral[2].

Al sustituir u dentro de la primera parte de nuestra integral y de toda la segunda parte, obtenemos:

$$\int u^3 \,\mathrm{d}u$$

Al integrarla por el método de nuestra fórmula 1, obtenemos:

$$\int u^3 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4$$

Pero, sustituyendo de regreso u a la variable original x, finalmente resulta:

$$\frac{1}{4}(x^2+1)^4$$

Esto es:

$$\int (x^2+1)^3(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x^2+1)^4$$

Ejercicios: Encontrar las siguientes integrales (pag. 304 del *Lang*):

$$\int \text{sen } (2x)(2) \,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$\int \cos 3x \,\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\int (x^3+x)^9(3x^2+1) \,\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\int xe^{x^2} \,\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$\int \frac{x}{x+1} \,\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$\int \text{sen}^2 x \cos x \,\mathrm{d}x \tag{12}$$

3. Integración por partes

A partir de la fórmula de derivación de una multiplicación:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \cdot v) = uv' + u'v \tag{13}$$

[2]Ya que debemos sumar la derivada de 1, pero recordemos que la derivada de una constante es cero: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$.

De manera equivalente, despejando uv'. tenemos:

$$uv' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - u'v \tag{14}$$

Integrando a ambos lados de 14, tenemos, aplicando las propiedades de suma,

$$\int uv' = \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{\text{Se cancelan entre sí}}(uv) - \int u'v \tag{15}$$

En el primer término del segundo miembro de 15, la integral y la derivada se cancelan, además, $v' = \mathrm{d}v$ y $u' = \mathrm{d}u$, quedando finalmente:

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u} \tag{16}$$

y la ecuación 16 es la llamada *Fórmula de integración por partes.*

Ejemplo: Hallar la integral

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}$$

Solución: También de esta integral hemos marcado, para fines didácticos, las partes que vamos a tomar.

Sea $u = x$ y $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$, a partir de aquí vamos a encontrar $\mathrm{d}u$ y v.

Encontraremos $\mathrm{d}u$ derivando en ambos lados de $u = x$; para encontrar v, integramos a ambos lados de $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$, puesto que muy posiblemente esta ecuación esté en términos de integración elemental.

De manera personal, creemos que escribiendo las cuatro expresiones juntas, tenemos a la mano todas las partes para aplicar la fórmula de integración por partes; esto es:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x & v &= e^x \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes (ecuación 16), tenemos:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

en este caso, la integral del lado derecho está en términos de integración elemental, por lo que la resolvemos sin ninguna dificultad y terminamos el ejemplo completamente, esto es, sin ninguna integral en el lado derecho de nuestra ecuación.

El cuidado que debemos tener al integrar por partes es la elección de u y $\mathrm{d}v$, puesto que algunas integrales pudieran complicarse al tomar los elementos mencionados equivocados o simplemente pudieran llevarnos a una tautología que no soluciona el problema.

También pudiera darse el caso que debemos hacer dos veces la integración por pates o que debiéramos aplicar la técnica (ya vista) del cambio de variable. Veremos un ejemplo:

Ejemplo 2: Hallar $\int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x$.

Solución: Sea $u = e^x$ y $\mathrm{d}v = \text{sen } x \, \mathrm{d}x$, entonces

$$\begin{array}{rl} u = e^x & \qquad \mathrm{d}v = \text{sen } x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x & \qquad v = -\cos x \end{array}$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x &= -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, \mathrm{d}x \\ \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \qquad (17) \end{aligned}$$

Y de esta última ecuación, pareciera que tenemos la misma integral como resultado, pero con coseno en lugar de seno. Procedemos a una nueva integración por partes con la integral del lado derecho de la ecuación:

$$\begin{array}{rl} u = e^x & \qquad \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x & \qquad v = \text{sen } x \end{array}$$

obtenemos, ahora:

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \text{sen } x - \underbrace{\int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x}_{\textit{sorpresa!}} \qquad (18)$$

Y hemos regresado a nuestra integral original del problema. sustituyendo la ecuación 18 en la ecuación 17, tenemos:

$$\int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \text{sen } x - \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x \qquad (19)$$

Pasando algebraicamente la segunda integral al lado izquierdo, tenemos,

$$\begin{aligned} \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x + \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x &= -e^x \cos x + e^x \text{sen } x \\ 2 \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x &= e^x \text{sen } x - e^x \cos x \qquad \text{De donde} \\ \int e^x \text{sen } x \, \mathrm{d}x &= \frac{e^x \text{sen } x - e^x \cos x}{2} \end{aligned}$$

Y finalmente, hemos resuelto la integral.

Ejercicios: Pags. 465 y 466 del *Swokowski*

4. Integrales trigonométricas

Para la solución de este tipo de integrales serán útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{20}$$

También habrá ocasiones en que se necesiten algunas otras identidades trigonométricas.

el propósito fundamental del uso de estas identidades es que sustituye la potencia cuadrada de sen o cos por una potencia de grado 1, lo que provocará que tengamos integrales en términos elementales, principalmente para potencias impares de las funciones seno o coseno y especialmente para potencias bajas.

NOTA: Es preciso que tengamos en mente que podemos (y en ocasiones *debemos*) aplicar las técnicas precedentes, principalmente el cambio de variable

Ejemplo 1: Hallar $\int \text{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$.
Solución.- . Primero, separamos el $\text{sen}^3 x$ en $\text{sen}^2 x$ sen x y tenemos:

$$\int \text{sen}^3 x\,\mathrm{d}x = \int \text{sen}\, x\, \text{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$$

Ahora, a partir de $\text{sen}^2 + \cos^2 x = 1$, despejamos $\text{sen}^2 x$ y nos queda $1 - \cos^2 x$, el cual sustituimos dentro de la integral y nos queda:

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^3 x\,\mathrm{d}x &= \int (\text{sen}\, x)(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (\text{sen}\, x - \cos^2 x\, \text{sen}\, x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \text{sen}\, x\,\mathrm{d}x - \int (\cos^2 x)(\text{sen}\, x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La primera integral del lado derecho se encuentra fácilmente por tablas (ver tabla). Para la segunda integral, hacemos el cambio de variable:

$$u = \cos x, \qquad \mathrm{d}u = -\text{sen}\, x\,\mathrm{d}x$$

Entonces, nuestra integral queda como:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x &= -\cos x + \int u^2 \, \mathrm{d}u \\ &= -\cos x + \frac{u^3}{3}\end{aligned}$$

Finalmente, regresamos u a términos de x y nuestra integral resuelta queda como:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

Hemos dichos que este método es para potencias impares, pero siguiendo este mismo método podemos llegar a las siguiente fórmulas para cualquier entero $n \geqslant 2$:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, \mathrm{d}x \qquad (21)$$

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x \qquad (22)$$

4.1. Sustitución trigonométrica

Cuando encontramos integrales que contienen raíces cuadradas en ocasiones es posible deshacernos de estas raíces cuadradas por medio de una sustitución trigonométrica.

Ejemplo: Hallar el área del círculo de radio 3 y centro en el origen.

Solución: La ecuación de este círculo es:

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

y la porción del círculo en el primer cuadrante es:

$$y = \sqrt{3^2 - x^2}$$

entonces, el cuarto de área A del círculo está dado por la integral definida:

$$\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2} \, \mathrm{d}x$$

Para encontrar la solución, hacemos la sustitución $x = 3 \operatorname{sen} t$ y $\mathrm{d}x = 3 \cos t \, \mathrm{d}t$.

En esta sustitución debemos tomar en cuenta que <u>Es una integral DEFINIDA</u>, por lo que esta sustitución debe servir también para encontrar los nuevos límites. En nuestro ejemplo, cuando $x = 0$, entonces, de nuestra sustitución $0 = 3\operatorname{sen} t$ lo que se cumple cuando $t = 0$. Cuando $x = 3$, $3 = 3\operatorname{sen} t$ lo que se cumple cuando $t = \frac{\pi}{2}$, entonces nuestro nuevo límite inferior es $t = 0$ y nuestro nuevo límite superior es $t = \frac{\pi}{2}$ y nuestra integral es:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2 - 3^2 \operatorname{sen}^2 t}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2}\sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2}\sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, \cos t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pero, sabemos que $1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$. sustituyendo esto dentro del radical de nuestra integral, tenemos:

$$\begin{aligned}
9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 t)}\, \cos t \,\mathrm{d}t &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\, \cos t \,\mathrm{d}t \\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aplicando la segunda identidad en (20), tenemos:

$$\begin{aligned}
9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 9\left[\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \,\mathrm{d}t\right] \\
&= 9\left[\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= 9\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 2(0)\right] \\
&= 9\left[\frac{\pi}{4} - 0 + 0 - 0\right] \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

Y ya habíamos dicho que es un cuarto del área. Para encontrar el área total, sólo debemos multiplicar por cuatro, esto es,

$$\text{Área total } = 4\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 9\pi$$

5. Integración por fracciones parciales

Queremos estudiar las integrales de cocientes de polinomios, esto es, fracciones en donde el numerador y el denominador pueden ser polinomios.

Sean f(x) y g (x) dos polinomios. Queremos investigar la integral

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

Usando la división, se puede reducir el problema al caso en que el grado de f es menor que el grado de g. El ejemplo siguiente ilustra esta reducción.

Ejemplo. Considerar los polinomios

$$f(x) = x^3 - x + 1 \tag{24}$$

y

$$g(x) = x^2 + 1 \tag{25}$$

Al dividir f entre g, tenemos:

$$x^3 - x + 1 \;\big|\; \underline{x^2 + 1}$$

Recordemos que cuando faltan potencias, debemos poner *ceros* en su lugar:

$$x^3 + 0 - x + 1 \;\big|\; \underline{x^2 + 0 + 1}$$

y el resultado de esta división es[3]:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + \frac{-2x+1}{x^2+1}$$

Para hallar la integral de $\frac{f(x)}{g(x)}$ integramos x y el cociente de la derecha, que tiene la propiedad de que el grado del numerador es <u>menor</u> que el grado del denominador.

De ahora en adelante, supondremos que, cuando se considere un cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, el grado de f será menor que el grado de g. Lo suponemos por que el método que se describirá trabaja sólo en este caso.

[3]Para los detalles de esta operación algebraica, consultar el artículo *Taller de herramientas matemáticas*, del mismo autor de este artículo o cualquier libro de álgebra

Comenzaremos estudiando casos especiales, y después describiremos cómo se puede reducir a éstos el caso general.

5.1. Factores lineales en el denominador

5.1.1. Caso 1

Si a es un número y n es un entero $\geqslant 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(}n-a)^{n-1} \qquad \text{si } n \neq 1, & (26)\\ &= \ln(x-a) \qquad \text{si } n = 1 & (27) \end{aligned}$$

Esto es bien conocido, y sabemos cómo hacerlo. De hecho, tenemos

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \int (x-a)^{-n}\,\mathrm{d}x = \int u^{-n} du \tag{28}$$

Suponer que $n \neq 1$. Entonces, por la sustitución $u = x - a,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, obtenemos

$$\int (x-a)^{-n} x = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \tag{29}$$

porque

$$u^{-n+1} = u^{-(n-1)} = \frac{1}{u^{n-1}} \tag{30}$$

Suponer que $n = 1$. Entonces la integral tiene la forma

$$\int \frac{1}{u} du = \ln u \tag{31}$$

y, por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln(x-a) \tag{32}$$

5.1.2. Caso 2.

A continuación consideramos integrales de expresiones como

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{ó} \qquad \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

donde el denominador está formado por un producto de términos de la forma

$$(x - a_1)\dots(x - a_n)$$

para algunos números $a_1, \dots, a_n$ que no necesariamente son distintos. El procedimiento equivale a escribir la expresión bajo la integral como una suma de términos, como en el caso 1.

Ejemplo: Deseamos hallar la integral

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

Para hacer esto, queremos escribir

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3}$$

Con algunos números c_1 y c_2 que debemos despejar. Se coloca la expresión de la derecha sobre un común denominador y se tiene:

$$\frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3} = \frac{c_1(x-3) + c_2(x-2)}{(x-2)(x-3)} \tag{33}$$

Así $(x-2)(x-3)$ es el común denominador, y

$$\text{Numerador } = c_1(x-3) + c_2(x-2) = (c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2 \tag{34}$$

Queremos que la fracción sea igual a $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$, por lo que el numerador debe ser igual a 1; esto es, debemos tener

$$(c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2 = 1 \tag{35}$$

Pero recordemos que **<u>SON POLINOMIOS</u>**, esto es, debemos formar polinomios a ambos lados del signo igual y poniendo ceros a las potencias faltantes hasta el máximo cualquiera de los lados.

En este caso, solo se llega hasta la potencia 1 de x, entonces la ecuación 35 queda como:

$$(c_1 + c_2)x^1 + (-3c_1 - 2c_2)x^0 = (0)x^1 + (1)x^0 \tag{36}$$

Los coeficientes a ambos lados de la ecuación 36 **<u>DEBEN SER IGUALES</u>** término a término, lo que significa que el coeficiente de x^1 del miembro izquierdo **<u>debe</u>** ser igual al coeficiente de la x^1 del miembro derecho. También debe cumplirse para las x^0 de ambos miembros. En estas circunstancias, encontramos que tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -3c_1 - 2c_2 &= 1 \end{aligned}$$

las cuales deberán resolverse como simultáneas.

Despejando c_1 y c_2 se tiene $c_2 = 1$ y $c_1 = -1$.Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-1}{(x-2)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-3)}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(x-2) + \ln(x-3) \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar la integral

$$\int \frac{(x+1)}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

Queremos hallar números c_1, c_2, c_3 tales que:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2} \tag{37}$$

Nótese que $(x-1)^2$ aparece en el denominador del cociente original. Para tomar esto en cuenta es necesario incluir dos términos con $(x-1)$ y $(x-1)^2$ en sus denominadores, que aparecieron como

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} \tag{38}$$

Por otro lado, $(x-2)$ aparece solo a la primera potencia en el cociente original, de modo que te da lugar únicamente a un término

$$\frac{c_3}{x-2} \tag{39}$$

En la descomposición en fracciones parciales. (La regla general se enuncia al final de esta sección.) Describimos ahora como hallar las constantes c_1, c_2, c_3 que satisfacen la relación

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2} = \frac{c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \tag{40}$$

Aquí pusimos la fracción de la derecha sobre el común denominador

$$(x-1)^2(x-2) \tag{41}$$

Tenemos

$$x+1 = \text{ numerador} = c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2$$

Realizando las operaciones indicadas y sacando como factor común las potencias de x, tenemos que:

$$(0)x^2 + (1)x^1 - (1)x^0 = (c_1 + c_3)x^2 + (-3c_1 + c_2 - 2c_3)x^1 + (2c_1 - 2c_2 + c_3)x^0 \tag{42}$$

Así que, que para hallar las constantes c_1, c_2, c_3 que satisfacen la relación deseada, tenemos que resolver las ecuaciones simultaneas.

$$\begin{aligned} c_1 c_3 &= 0 \\ -3c - 1 + c_2 - 2c_3 &= 1 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 1 \end{aligned}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas, que se puede resolver para determinar c_1, c_2, c_3 se halla que $c_1 = -3$ $c_2 = -2$ $c - 3 = 3$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-3}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{(x-2)}\,\mathrm{d}x \\ &= -3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3\ln(x-2) \end{aligned}$$

Este es un teorema algebraico con el cual, si se sigue le procedimiento anterior para escribir una fracción en términos de fracciones mas sencillas de acuerdo con el método ilustrado en los ejemplos, siempre se podrían despejar los coeficientes se podrán despejar los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Si tenemos potencias de orden superior de algún factor en el denominador, entonces tenemos que usar también potencias de orden superior en las fracciones más simples de lado derecho. Ejemplo. Podemos descomponer

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{(x-1)^3} + \frac{c_4}{x-2} \tag{43}$$

Al poner el lado derecho sobre un denominador común, e igualando el numerador con $x + 1$, podemos despejar los coeficientes c_1, c_2, c_3, c_4