

Segundo taller de herramientas matemáticas

Trigonometría

c. Dr. Enrique Morales Rodríguez
enmora@inaoep.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Preparatoria Regional “Simón Bolívar”
Academia de Física

13 de diciembre de 2003

Resumen

En el primer curso aprendimos acerca de la aritmética y algo del álgebra.

En este curso aprenderemos acerca de la trigonometría, que nuevamente estará enfocada al estudio de la Física y puede ser usada en temas que van desde la mecánica hasta la teoría electromagnética a muy altos niveles. Recalcaremos que el nivel que abarca este curso esta destinado a la Preparatoria

Índice

1. Los conceptos básicos	2
1.1. Teorema de Pitágoras	2
1.2. Funciones trigonométricas	3
2. Aplicaciones	5
2.1. Vectores	5
2.1.1. ¿Qué es un vector?	5
2.2. Suma de vectores	7
Bibliografía	9

1. Los conceptos básicos

La definición de la trigonometría parte del triángulo rectángulo. Haremos una primera mención de él con los respectivos nombres de sus lados, que mostramos en la figura 1

Este triángulo sirve de base para el Teorema de Pitágoras y para la definición de las funciones trigonométricas de ángulos agudos ¹.

1.1. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Los **catetos** son los lados que **forman** el ángulo recto

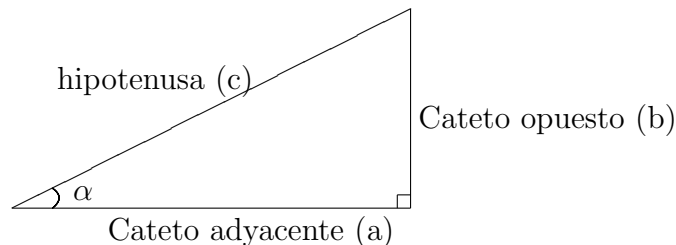


Figura 1: *El triángulo rectángulo y sus nombres (con respecto al ángulo α)*

Tomando las letras dentro de los paréntesis en la figura 1, tenemos la siguiente ecuación:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

Y resulta que podemos saber el tamaño de cualquiera cateto (a o b), despejando de la ecuación 1

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad (2)$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (3)$$

Ejemplo. ¿Cuanto mide la diagonal de un rectángulo que mide 40m de ancho y 60 de largo?.

Solución:

En este caso, tenemos que $a = 60m$ y $b = 40m$, entonces la diagonal será la hipotenusa.

¹Es decir, dentro del primer cuadrante. Para los demás ángulos, debemos fijarnos en el signo del eje a considerar

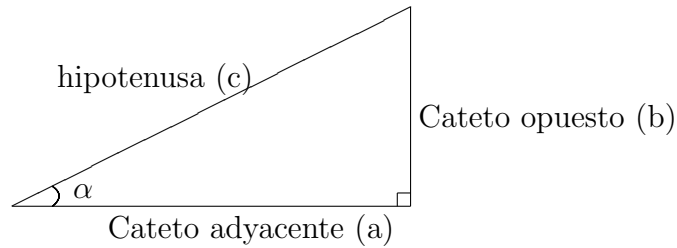


Figura 2: El triángulo rectángulo y sus nombres (con respecto al ángulo α)

Ejemplo: Si tenemos un triángulo rectángulo que tiene un ángulo $\alpha = 23^\circ$, y la hipotenusa mide 54 metros, ¿Cuánto mide el lado adyacente?.

Solución:

Como conocemos el ángulo y la hipotenusa y necesitamos el lado adyacente, aplicaremos la función coseno (del cuadro 1)

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

Despejando de esta ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha(c) &= a \\ \Rightarrow a &= \cos 23^\circ(54) \\ \Rightarrow a &= (.9205)(54) \\ \Rightarrow a &= 49.7 \end{aligned}$$

El lado adyacente mide 49.7 metros

Otro ejemplo: Si en un triángulo rectángulo, un cateto mide 30 metros y otro 45 metros ¿Cuanto mide el ángulo y la hipotenusa?

solución: Como solo tenemos los catetos, el ángulo lo hallaremos por medio de la función tangente; esto es:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \alpha &= \tan^{-1} \left(\frac{30}{45} \right) \\ \Rightarrow \alpha &= \tan^{-1}(0.67) \\ \Rightarrow \alpha &= 33.7^\circ \end{aligned}$$

El ángulo mide 33.7 grados

2. Aplicaciones

De manera matemática no hay más por hacer. En esta sección, hablaremos de algunas aplicaciones prácticas de la trigonometría.

2.1. Vectores

Hablar de vectores es meterse en un campo muy amplio, pero aquí trataremos primero, qué cosa es un vector y posteriormente de la suma de vectores.

2.1.1. ¿Qué es un vector?

Un vector es la representación de una cantidad que posee como características principales **magnitud y dirección**.

La magnitud es el “tamaño” del vector, mientras que la dirección es el “ángulo” que abarca el vector con el eje principal (el eje x).

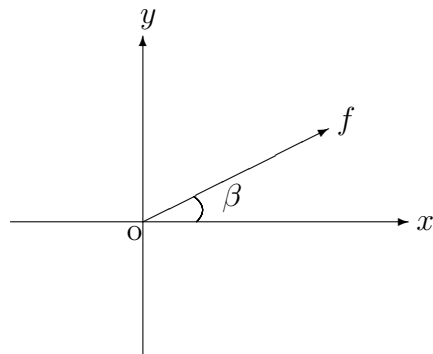


Figura 3: *Un vector en el plano cartesiano*

En la figura 3 el tamaño del vector es la distancia del origen al punto f (al final de la flecha del vector) y su dirección está marcada por el ángulo β .

Consideremos ahora los llamados “componentes rectangulares” del vector, que no son otra cosa que las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados, esto se muestra en la figura 4:

Si en la figura 4, el vector mide A , su proyección sobre el eje x se puede calcular mediante la función coseno, pues de la definición dada en el cuadro 1, vemos que:

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x_0}{A} \quad (4)$$

De la ecuación 4, despejamos x_0 , y obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \theta(A) &= x_0 \\ \Rightarrow x_0 &= A \cos \theta \end{aligned}$$

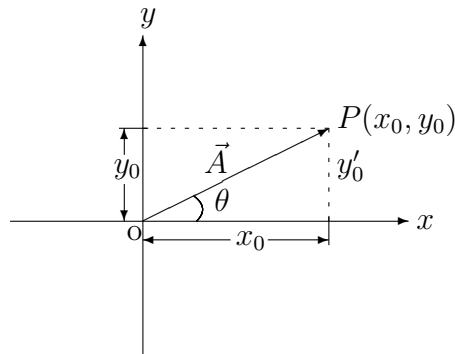


Figura 4: Las proyecciones del vector \vec{A} sobre los ejes coordenados

De la misma manera, para obtener el componente en y observamos que la línea punteada etiquetada como y'_0 y la etiquetada como y_0 son iguales. Después nos fijamos en la tabla 1 y vemos que la función seno es la adecuada para este caso, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{y_0}{A} \\ \Rightarrow \text{sen } \theta(A) &= y_0 \\ \Rightarrow y_0 &= A \text{ sen } \theta \end{aligned}$$

Analizemos ahora el caso contrario:

Supongamos que únicamente tenemos los valores de los componentes en x y y , además deseamos obtener la magnitud del vector y su dirección.

Procedemos como sigue:

Partimos de que conocemos solamente x_0 y y_0 . Si observamos la figura 4, vemos que el extremo de cada componente marcará el final del vector, el punto $P(x_0, y_0)$ y que cada componente es el cateto de un triángulo rectángulo.

Con esto a la vista, podemos conocer la magnitud del vector que será nada más y nada menos que la hipotenusa, así que de la ecuación 1:

$$A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Para obtener la dirección, nos basamos en la tabla 1. Aplicando la función tangente:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{x_0}{y_0} \\ \Rightarrow \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{y_0} \right) \end{aligned}$$

En resumen:

- Si tenemos A (magnitud) y θ (dirección), entonces:

$$\begin{aligned}x_0 &= A \cos \theta & y \\y_0 &= A \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

- Si tenemos x_0 y y_0 (Los componentes rectangulares), entonces:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} & y \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{y_0} \right)\end{aligned}$$

2.2. Suma de vectores

Existen dos métodos básicos para realizar la suma de vectores: Geométrico y analítico.

Con el método analítico hacemos uso de la trigonometría, que es lo que nos ocupa, por lo que dejaremos el método geométrico para estudiarlo en el salón de clases.

La suma de vectores necesariamente nos dará un vector resultante, que llamamos simplemente “resultante”.

A estas alturas del curso, ya conocemos los vectores, y principalmente sus componentes rectangulares, por lo que podemos afirmar:

Para sumar vectores, lo único que debemos hacer es sumar sus componentes rectangulares, tanto en Y como en X , y el resultado de esas sumas serán las componentes de la resultante.

La magnitud y dirección de la resultante podemos conocerlas por los métodos antes vistos

Ejemplo: Calculemos la resultante de los vectores mostrados en la figura 5:

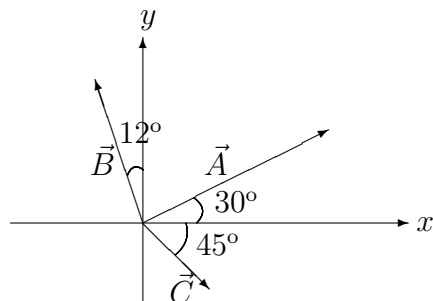


Figura 5: Primer ejemplo de suma de vectores

En donde $A = 8$, $B = 6$ y $C = 4$.

solución:

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 8 \text{ a } 30^\circ \\ \vec{B} &= 6 \text{ a } 102^\circ \\ \vec{C} &= 4 \text{ a } -45^\circ\end{aligned}$$

Veamos: para el vector \vec{B} , marcado con 12° , se la han sumado los 90° del ángulo recto; $90 + 12 = 102$, mientras que al vector \vec{C} se le ha conservado el signo negativo.

Calculando los componentes de cada vector tenemos que:

$$\begin{aligned}A_x &= 8 \cos 30^\circ = 8(0.8660) = 6.9282 \\ A_y &= 8 \sin 30^\circ = 8(0.5) = 4 \\ B_x &= 6 \cos 102^\circ = 6(-.2079) = -1.2745 \\ B_y &= 6 \sin 102^\circ = 6(0.9781) = 5.8686 \\ C_x &= 4 \cos -45^\circ = 4(0.7071) = 2.8284 \\ C_y &= 4 \sin -45^\circ = 4(-0.7071) = -2.8284\end{aligned}$$

Ahora, sumamos, por un lado las componentes en x y por otro las componentes en y :

Para x , sumamos:

$$\begin{array}{r}A_x = 6.9282 \\ B_x = -1.2745 \\ C_x = 2.8284 \\ \hline R_x = 8.4821\end{array}$$

Para y , sumamos:

$$\begin{array}{r}A_y = 4 \\ B_y = 5.8686 \\ C_y = -2.8284 \\ \hline R_y = 7.0502\end{array}$$

Y finalmente, obtenemos la magnitud de la resultante

$$R = \sqrt{(8.4821)^2 + (7.0502)^2} = \sqrt{121.65} = 11.03 \quad (5)$$

y la dirección:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{7.0502}{8.4821} \right) = \tan^{-1}(0.8312) = 39.73^\circ \quad (6)$$

La resultante es:

$$\vec{R} = 11.03 \text{ a } 39.73^\circ \quad (7)$$

Otro ejemplo: Un avión sale de Sao Paulo hacia México D.F., que está a una distancia de 2500km a un ángulo con respecto a la paralela al ecuador de 132° . Posteriormente parte para New York que está a 2000 Km a un ángulo de 42° respecto a la paralela al

ecuador. Y finalmente llega a Berlín, que está a 3150km de New York y a un ángulo de -19° respecto a la horizontal. ¿A que distancia y dirección está con respecto a Sao Paulo?

Solución:

Hallamos los componentes de los vectores, siempre considerando que la ciudad de que parten está en el origen:

$$SP_x = 2500 \cos 132 = 2500(-0.6691) = -1672.83$$

$$DF_x = 2000 \cos 42 = 2000(0.7431) = 1486.29$$

$$NY_x = 3150 \cos -19 = 3150(0.9455) = 2978.38$$

Sumando tenemos: $R_x = 2791.85$

$$SP_y = 2500 \operatorname{sen} 132 = 2500(0.7431) = 1857.86$$

$$DF_y = 2000 \operatorname{sen} 42 = 2000(0.6691) = 1338.26$$

$$NY_y = 3150 \operatorname{sen} -19 = 3150(-0.3256) = -2363.80$$

Sumando tenemos: $R_y = 832.29$

Finalmente, calculamos la distancia y la dirección:

$$D = \sqrt{2791.85^2 + 832.29^2} = \sqrt{8487133.0666} = 2913.27$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{832.29}{2791.85} \right) = \tan^{-1}(0.2981) = 16.6^\circ$$

Referencias

- [1] Alvarenga, Beatriz et al.; *“Física General”*; Ed. Harla, México, 1983.
- [2] Baldor, Aurelio; *“Geometría y Trigonometría”*; Ed. Publicaciones Cultural, México, 1985.
- [3] Comité para la Enseñanza de la Física; *“Física 1”*; 6ª reimpresión; Ed. LIMUSA, México, 1992.
- [4] Halliday, David y Resnick, Robert; *“Física parte 1”*; Ed. CECSA, México, 1982.
- [5] Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony J.; *“Cálculo vectorial”*; 3ª ed.; Ed. Addison Wesley, U.S.A., 1991.
- [6] Swokowsky, Earl. W.; *“Algebra y trigonometría con geometría analítica”*; 2ª edición; Ed. Iberoamérica, México, 1988.