Taller de herramientas matemáticas

Versión compacta

c. Dr. Enrique Morales Rodríguez
enmora@inaoep.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Preparatoria Regional "Simón Bolívar"
Academia de Física

21 de diciembre de 2003

Resumen

En el estudio de todas las disciplinas técnicas y científicas es necesario hacer uso de las matemáticas en mayor o menor grado.

En el presente curso se hace omisión de la parte de polinomios para hacerlo más accesible al alumno principiante de física y en lugar de esa parte se complementa la aritmética con una breve explicación del llamado "despeje" para ser utilizado en las ecuaciones de los cursos de física de la preparatoria.

Índice

1. Los números y su uso

El principio de las matemáticas son los números, por lo que conoceremos los tipos de números, con énfasis en las fracciones y la aritmética.

Durante el transcurso de todo el taller (y sería bueno que toda la vida) debemos recordar que a un número cualquiera lo acompañan varios números 1 y el signo positivo, aunque comúnmente no los escribimos. Esto es:

Sea a cualquier número:

$$a = +\frac{1a^1}{1} \tag{1}$$

es decir, el número a es **positivo**, está elevado a la **potencia 1**, **multiplicado por 1** y **dividido entre 1**.

2. Aritmética

El conocimiento de la aritmética es la base de todas las matemáticas superiores como el álgebra, la geometría analítica y el cálculo, sin mencionar que es importante a la hora de presentar un examen de admisión en el nivel superior.

2.1. Suma

La suma de números toma una importancia relevante cuando tenemos mezclados números negativos y positivos.

2.1.1. Números negativos y positivos

Consideremos una recta numérica, tal y como la conocimos en la primaria, con una ranita mirando hacia la derecha y un signo positivo en el lomo y otra mirando hacia la izquierda, con el signo negativo en el lomo.

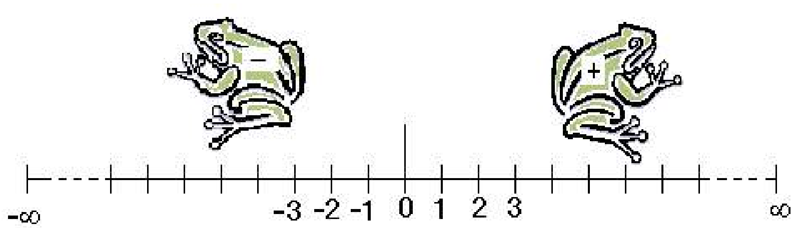

Figura 1: Recta numérica (Sistema unidimensional)

El uso de esta forma de conocer los números –principalmente los negativos– nos da la idea de que esos números "crecen" hacia donde mira la ranita; entonces los números positivos crecen hacia la derecha hasta ∞, mientras que el valor absoluto de los negativos "crece" hacia la izquierda, hasta llegar a $-\infty$.

Para sumar números negativos y positivos entremezclados, se procede como sigue:

1. Identificar los números positivos y diferenciarlos de los negativos.
2. Agrupar, para sumarlos, en una columna a los números negativos y por otro los positivos.
3. Realizar la suma de cada columna
4. Identificar cual es el número absoluto mayor
5. Del mayor, restar el menor
6. Al resultado, ponerle el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo:
$-1 + 2 - 43 + 4 + 22 - 54 - 67 + 89 + 3 - 32 + 45 =$¿?

$$\begin{array}{rr}
+ & - \\
2 & 1 \\
4 & 43 \\
22 & 54 \\
89 & 67 \\
3 & 32 \\
45 & \\
\hline
165 & 197
\end{array}$$

Como dijimos en el punto 4, vemos que el mayor es el 197, entonces, como dice el punto 5, de 197 restamos 165,$(197 - 165 = 32)$. El signo será negativo (-32), puesto que es el signo de 197, entonces:

$$-1 + 2 - 43 + 4 + 22 - 54 - 67 + 89 + 3 - 32 + 45 = -32$$

2.2. Resta

Es relativamente sencillo notar que al pensar en los signos positivo y negativo como direcciones de los números en un sistema unidimensional (recta numérica), la resta es en realidad la suma de un número negativo a un positivo; es decir, la resta es la misma operación que la suma pero en sentido contrario.

2.3. Multiplicación

Si sumamos el mismo número repetidas veces, estamos en presencia de la multiplicación, que es, en resumen, una suma abreviada. Ejemplo:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4 \text{ veces}} = 3 \times 4 = 12 \tag{2}$$

Para la multiplicación, tenemos diferentes formas de simbolizarla [1], a saber:
Sean a y b dos números cualquiera:

ab	Nada entre ellos
$a \times b$	Una cruz
$a \cdot b$	Un pequeño punto a media altura
$a\,(b)$	Un signo de agrupación
$\{a\}\,[b]$	Dos signos de agrupación

Si multiplicamos números positivos y negativos, el resultado se rige por las leyes de los signos:

$$\boxed{\begin{array}{c} + \times + = + \\ + \times - = - \\ - \times + = - \\ - \times - = + \end{array}}$$

Cuadro 1: Leyes de los signos

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4 \times (-3) &= -12 \\ (-5) \times (-2) &= +10 \end{aligned} \tag{3}$$

2.4. División

Así como la resta tiene la misma naturaleza que la suma, pero invertida, para la multiplicación tenemos como operación inversa a la división, para la cual, al igual que ella, existen diversas maneras de representar la división:
sean a y b dos números cualquiera:

$$a \div b$$
$$\tfrac{a}{b}$$

A la expresión $\frac{a}{b}$ se le llama fracción o quebrado

[1] Por signos de agrupación entenderemos que son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] o las llaves { }.

2.5. Potencia

Si tenemos multiplicaciones sucesivas, estamos en presencia de la potencia, esto es:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}} \tag{4}$$

En donde a es llamada la *base* y n se llama *exponente* (o potencia). Por ejemplo:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Con esta idea, podríamos demostrar las reglas de la potencia que en esta ocasión, solo enunciamos. Sean a , b , n y m cualquier número:

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$

Cuadro 2: Reglas de potenciación

2.6. Raíz

La operación inversa de la potencia es la raíz, y podemos decir que una número es raíz de otro si al elevarlo a la potencia dada, se obtiene el primer número.

$$c = \sqrt[n]{a} \Rightarrow c^n = a \tag{5}$$

lo que en palabras quiere decir: "c es la raíz n-ésima de a si c a la n es igual a a".

Las reglas para la radicación son:

Además, podemos definir un radical como una potencia fraccionaria; esto es:

$$\sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

En general, si a está elevada a alguna potencia m dentro del radical de grado n, tenemos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \tag{7}$$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$

Cuadro 3: Reglas de radicación

2.7. Prioridad de la operaciones

En capítulos anteriores vimos que las operaciones aritméticas son algunas inversas de otras, y nos debemos preguntar, ¿Cuales se realizan primero y cuales después?.

En primer lugar identifiquemos cuales son las operaciones inversas unas de otras.

Operación directa	**Operación inversa**
Suma	Resta
Multiplicación	División
Potencia	Raíz

Cuadro 4: Operaciones inversas

A propósito la tabla 4 fue ordenada de menor a mayor dificultad en la realización.

El orden de prioridad es:

1. Potencia
2. Raíz
3. Multiplicación
4. División
5. Suma
6. Resta

Primero se hacen la potencia y la raíz, después multiplicación y división y al último la suma y la resta.

3. Fracciones

El tema de fracciones necesita un capítulo aparte debido a la dificultad intrínseca de la división (no debemos olvidar que una fracción es una división indicada), además de que las técnicas utilizadas para resolver las operaciones aritméticas entre estos a veces causan confusión.

Una fracción es algo como:

$$\frac{a}{b} \tag{8}$$

Y al número de arriba (a) se le llama *numerador* y al de abajo (b) se le llama *denominador*. Para recordar esto propongo un recurso mnemotécnico: el *numerador* es el **número** de rebanadas de pastel que me tocan, mientras que el *denominador* son las rebanadas en que se dividió **todo** el pastel.

Una fracción es **negativa** en los siguientes casos (el número de signos negativos es impar):

$$-\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{b}, \qquad \frac{a}{-b}, \qquad -\frac{-a}{-b} \tag{9}$$

y **positiva** en los siguientes casos (el número de signos negativos es par):

$$\frac{a}{b}, \qquad -\frac{-a}{b}, \qquad -\frac{a}{-b}, \qquad \frac{-a}{-b} \tag{10}$$

3.1. Suma y resta

Una vez más repetimos que en el sistema unidimensional (como la recta numérica), podemos considerar a la suma y a la resta como la misma operación, por lo que las consideramos al mismo tiempo. Para la suma y la resta tenemos diferentes casos:

3.1.1. Con el mismo denominador

Cuando tenemos suma o resta de fracciones con el mismo denominador, en el resultado se escribe el mismo denominador y únicamente se suman o restan los numeradores para formar la fracción resultante. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3+7-4}{5} = \frac{6}{5} \tag{11}$$

3.1.2. Con diferente denominador

Cuando tenemos diferente denominador, la cosa se complica, por lo que hacemos uso del *mínimo común múltiplo*, que se obtiene de la siguiente manera:

mínimo común múltiplo (mcm):
Es el menor número que divide a todos exactamente.

El mcm se obtiene por el método de factores primos[2], por ejemplo:
Hallar el mcm de $2, 6, 12, 7$ y 14 :

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & 12 & 7 & 14 & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 3 & 6 & 7 & 7 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 7 & \mathbf{7} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Entonces el mcm es: $mcm = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

Para hallarlo se procede como sigue:

1. Se alínean los números y se dibuja una raya debajo de ellos y otra a la derecha del último.
2. A la derecha del último número se escribe el primer número primo (el número 2), y se divide cada uno de los números en cuestión, escribiendo el resultado debajo del número. Si no tiene división, se escribe el mismo número en vez del resultado.
3. En la nueva línea formada se intenta dividir entre el mismo número primo anterior hasta que ya no haya números que se dividan exactamente.
4. Se prosigue con el siguiente número primo (el 3), y si no hay números que se dividan entre éste, entonces se sigue con los números primos mayores, hasta encontrar los que sí dividan exactamente.
5. El proceso de búsqueda termina cuando debajo de los números quede una línea de 1's.
6. El mínimo común múltiplo será la multiplicación de todos los números primos encontrados en la columna a la derecha de la raya.

Cuando se ha hallado el mcm, este será el denominador del resultado y ya entonces se procede, con un ejemplo, como sigue:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{3}{12} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14} \stackrel{?}{=}$$

[2] Un número primo es aquel que se divide de manera exacta únicamente entre sí mismo y la unidad.

1. El mcm es el denominador del resultado

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{}{84}$$

2. Se divide el mcm entre el denominador de la primera fracción

$$\begin{array}{rcl} \underset{\Uparrow}{\frac{3}{2}}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14} & = & \underset{\Uparrow}{\frac{}{84}} \\ 84\div 2 & = & 42 \end{array}$$

3. El resultado se multiplica por el numerador de la misma fracción y este resultado se escribe en el espacio del numerador para la fracción resultante.

$$42\times 3=126$$

$$\frac{\overset{\Downarrow}{3}}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14} = \frac{126\qquad\qquad}{84}$$

4. Se copia el signo delante de la primera fracción y se escribe delante del primer resultado sobre el mcm.

$$\frac{3}{2}\overset{\Downarrow}{-}\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{126\overset{\Downarrow}{-}\qquad\qquad}{84}$$

5. se sigue así con todas las fracciones componentes.

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{126-70+21+24-6}{84}=\frac{95}{84}$$

3.2. Multiplicación

La multiplicación se realiza de una manera bastante sencilla: Se multiplica numerador por numerador y es el numerador del resultado. Se multiplica denominador por denominador y será el denominador del resultado. Esto es:

$$\frac{a}{b}\times\frac{g}{h}=\frac{a\times g}{b\times h}=\frac{ag}{bh}$$

es claro que también se aplicarán las reglas de los signos, además, la recíproca también es válida, es decir:

$$\frac{ag}{bh}=\frac{a}{b}\cdot\frac{g}{h}=\frac{a}{h}\cdot\frac{g}{b} \tag{12}$$

3.3. División

Una idea que me parece buena para aprenderla es considerar a la división como producto cruzado. Esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{f}{g} = \frac{\overset{a \searrow}{\times}}{b} \div \frac{f}{\underset{=}{g \nearrow}} = \frac{a \times g}{b \times f} = \frac{ag}{bf} \tag{13}$$

Se empieza con el numerador de la primera fracción (dividendo) multiplicado por el denominador de la segunda fracción (divisor) y será el numerador del resultado (cociente); después, el denominador de la primera fracción multiplicado por el numerador de la segunda fracción y será el denominador del resultado

3.4. Fracciones complejas

Por fracciones complejas entendemos que son las fracciones del tipo:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} \tag{14}$$

Esto es, el numerador o el denominador o ambos son fracciones.

En la ecuación 13, vemos que la primera fracción es el numerador y la segunda es el denominador de una fracción compleja; expresada de esta forma se vería:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{f}{g}} = \frac{a \times g}{b \times f} = \frac{\text{extremo} \ \times \ \text{extremo}}{\text{medio} \ \times \ \text{medio}} \tag{15}$$

y a la ecuación 15 se le llama **Regla de la herradura**.

3.4.1. Reducción de fracciones complejas

Las fracciones complejas se pueden reducir a una sola fracción, por ejemplo:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1+\frac{2}{3}}{5}}{6 + \frac{4}{5}}$$

lo primero que se debe hacer es realizar las operaciones en los numeradores y denominadores más externos para poder empezar a reducir por el método de la herradura:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{\overbrace{1+\frac{2}{3}}}{5}}{6 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\frac{3+2}{3}}{5}}{6 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \left.\frac{\frac{5}{3}}{5}\right\}}{6 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{1}}}{6 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5 \times 1}{3 \times 5}}{6 + \frac{4}{5}} =$$

$$\frac{\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{5}{15}}}{\underbrace{\frac{6}{1}+\frac{4}{5}}}=\frac{\frac{15+10}{30}}{\frac{30+4}{5}}=\left.\frac{\frac{25}{30}}{\frac{34}{5}}\right\}=\frac{25\times 5}{30\times 34}=\frac{25\times 5}{6\times 5\times 34}=\frac{25}{204}$$

En este ejercicio, las llaves arriba y abajo muestran los casos cuando se hace suma o resta de fracciones, mientras que las llaves a la derecha, señalan reducción de fracciones complejas por el método de la herradura.

Es obvio que un único ejemplo no es suficiente para entender el proceso, pero se pueden hacer más ejercicios en esta parte.

4. El despeje en las fórmulas

Cuando hablamos de "despejar" una literal que pertenece a una ecuación estamos queriendo decir algo como: *queremos saber como responde esta característica cuando cambian las demás características del problema.*

Despejar es dejar a la variable en cuestión en el miembro izquierdo de la ecuación sin ningún coeficiente[3] y todo lo demás en el miembro derecho, esto es, del lado derecho del signo $=$.

4.1. Reglas

Para despejar una variable, debemos seguir las reglas de la prioridad de las operaciones mostradas en el cuadro 4 (página 7), y como recurso mnemotécnico[4], seguiremos esto:

Si está **sumando** pasa **restando**
Si está **multiplicando** pasa **dividiendo**
Si está en **potencia** pasa como **raíz**

Y obviamente al revés también funciona.

Ejemplo: De la ecuación de la velocidad constante:

$$v = \frac{d}{t}$$

despejar el tiempo (t).

Solución:

Primero, como (t) está dividiendo, pasa multiplicando del otro lado del signo $=$.

$$vt = d$$

Después, como v está multiplicando, pasa del otro lado dividiendo, y como t ya queda solita, he terminado.

$$t = \frac{d}{v}$$

[3]**Recordemos:** No debemos olvidar lo que afirmamos desde la mismísima ecuación 1, (página 3)

[4]relativo a la memoria

Otro ejemplo: De la ley de la Gravitación Universal:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

si queremos conocer la distancia R entre los cuerpos celestes de masas M de uno y m del otro, primero, pasamos R^2 al primer miembro:

$$FR^2 = GMm$$

Después, pasamos F al segundo miembro:

$$R^2 = G\frac{Mm}{F}$$

Observemos que aún cuando ya no hay otra literal que acompañe a la R, permanece afectada por el exponente ^{2}, por lo este exponente deberá pasar al otro lado como raíz cuadrada:

$$R = \sqrt{G\frac{Mm}{F}}$$

Y ¡Listo!, hemos terminado, pues R ya esta sola.

Un ejemplo más: Consideremos la ecuación de Bernoulli para una cámara de cohete espacial:

$$P - P_0 = \frac{1}{2}\rho\left(v_0^2 - v^2\right)$$

Supongamos que deseamos saber la rapidez de salida de los gases de la cámara (v_0).

En primer lugar podemos ver a la ecuación de la siguiente forma:

$$P - P_0 = \frac{\rho\left(v_0^2 - v^2\right)}{2}$$

Y vemos que el número dos está dividiendo, entonces pasará multiplicando y queda:

$$2\left(P - P_0\right) = \rho\left(v_0^2 - v^2\right)$$

Cambiando el orden de los miembros (no afecta en nada), tenemos:

$$\rho\left(v_0^2 - v^2\right) = 2\left(P - P_0\right)$$

La ρ está multiplicando, por lo que pasará dividiendo (y desaparecen los paréntesis del primer miembro):

$$v_0^2 - v^2 = \frac{2\left(P - P_0\right)}{\rho}$$

la v^2 está restando, pasará sumando:

$$v_0^2 = \frac{2\,(P - P_0)}{\rho} + v^2$$

Y finalmente, el cuadrado pasará como raíz:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,(P - P_0)}{\rho} + v^2}$$

Y ¡Listo!. Hemos terminado

En las ecuaciones utilizadas en los ejemplos anteriores, considero que realmente no hay necesidad de conocer la física involucrada en ellas, puesto que sólo se utilizan para ilustrar el procedimiento del despeje.

Cualquier duda o comentario, le agradeceré contactar al autor

Referencias

[1] Anfossi, Agustin; *"Curso de Algebra"*; cuarta edición, Ed. Progreso, México, 1951.

[2] Baldor, Aurelio; *"Algebra"*; Ed. Publicaciones Cultural, México, 1985.

[3] *"Primer curso de matemáticas"*; Un libro viejo y despastado que desgraciadamente carece de las primeras 38 páginas (calculo que por allá de 1950 o anterior).

[4] Swokowsky, Earl. W.; *"Algebra y trigonometría con geometría analítica"*; 2^aedición; Ed. Iberoamérica, México, 1988.