Parábola, elipse e hipérbola

Enrique Morales Rodríguez
enmora@siu.buap.mx

Resumen

Estas notas surgen como complemento del curso de Matemáticas IV de la Preparatoria Regional "Simón Bolívar". A estas alturas del curso ya debieran haberse cubierto los temas de *recta* y *circunferencia* de geometría analítica. Además, recalcamos que se necesita un buen respaldo de álgebra y aritmética, por lo que si el lector necesita material de estos temas, puede puede pedirlos a la dirección electrónica del autor

Índice

1. Parábola **1**
- 1.1. Parábola con vértice en el origen 2
- 1.2. Parábola con vértice en cualquier punto del plano 4

2. Elipse **6**

3. Hipérbola **7**

1. Parábola

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que está siempre a la misma distancia de un punto fijo llamado *foco* y de una recta fija llamada *directriz*.

En la figura 1 se muestran los elementos que forman una parábola: El Foco (F), la directriz (d), el eje de la parábola y los segmentos p (de la parábola a la directriz) y p' (de la parábola al foco), los cuales siempre cumplen la condición $p = p'$. Estos elementos son las propiedades que determinaremos a partir de la ecuación de la parábola o, si conocemos estos, determinar la ecuación.

El punto donde se cruza la parábola con su eje se llama Vértice (V). Algunos autores citan también al "lado recto" de la parábola, que es el segmento de recta perpendicular al eje de la parábola, que pasa por el foco y toca en ambos extremos a la parábola.

En general, lo que debemos conocer de la parábola son sus propiedades:

- El foco F(x,y)
- El vértice V(x,y)
- La longitud del lado recto
- El eje de la parábola (eje focal)
- La ecuación de la directriz

  Y todo eso se conoce a partir de:

- La ecuación

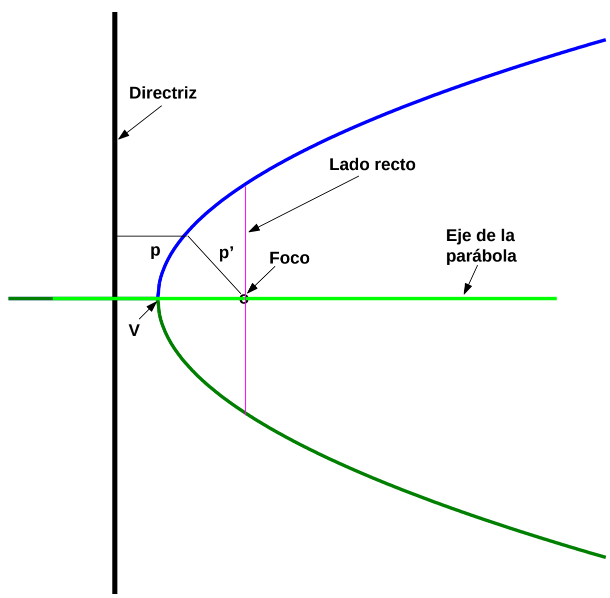

FIGURA 1: *Elementos de una parábola*

1.1. Parábola con vértice en el origen

En este caso, el eje de la parábola, el cual también es su eje de simetría (eje focal), corresponde a un eje coordenado y entonces tenemos dos casos: cuando el eje de la parábola coincide con el eje X (parábola horizontal) y cuando el eje de la parábola coincide con el eje y (parábola vertical).

La situación se complica aún más pues debemos tomar en cuenta también que para los dos casos tenemos dos opciones: de la horizontal: que abra a la derecho o izquierda; de la vertical: que abra hacia arriba o hacia abajo.

Eje focal en el eje x.- En este caso la parábola es horizontal y la ecuación es:

$$y^2 = 4px \tag{1}$$

Y sus elementos son:

El foco F(p,0)	El vértice V(0,0)
La longitud del lado recto $l = \|4p\|$	El eje de la parábola (eje focal) $y = 0$
La ecuación de la directriz es: $x = -p$	Si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>derecha</u>. Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>izquierda</u>

Eje focal en el eje y.- En este caso la parábola es vertical y la ecuación es:

$$x^2 = 4py \tag{2}$$

Los elementos, en este caso, son:

El foco F(0,p)	El vértice V(0,0)
La longitud del lado recto $l = \|4p\|$	El eje de la parábola (eje focal) $x = 0$
La ecuación de la directriz es: $y = -p$	si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>arriba</u>. Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>abajo</u>

Ejemplo: *Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje y, pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la eccuación de su directriz y la longitud de su lado recto.*

Solución: Al analizar el problema vemos que la ecuación es de la forma 2:

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de la parábola, por lo que entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (4)^2 &= 4p(-2) \\ 16 &= -8p \qquad \therefore \\ p &= \frac{16}{-8} \\ p &= -2 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación es:

$$x^2 = -8y$$

De la lista de elementos, podemos ver que:

- El foco es: F(0,-2)
- La ecuación de la directriz es: $y = -2$
- La longitud del lado recto es: $l = |4p| = |4(-2)| = |-8| = 8$

Ejercicios *Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada:*

1.- $y^2 = 12x$	2.- $x^2 = 12y$
3.- $y^2 + 8x = 0$	4.- $x^2 + 2y = 0$
5.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco $F(0, -3)$.	6.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco $F(3, 0)$.
7.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y la directriz es la recta $y - 5 = 0$.	8.- Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y la directriz es la recta $x + 5 = 0$.

1.2. Parábola con vértice en cualquier punto del plano

Cuando se ha movido la parábola y su eje es paralelo la eje x o y, su vértice ocupa el punto $V(h, k)$, entonces su ecuación es:

Eje focal paralelo al eje x.- En este caso la parábola es horizontal y la ecuación es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{3}$$

Y sus elementos son:

El foco F(p+h,k)	El vértice V(h,k)
La longitud del lado recto $l = \|4p\|$	El eje de la parábola (eje focal) $y = k$
La ecuación de la directriz es: $x = h - p$	Si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la <u>derecha</u>. Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la <u>izquierda</u>

Eje focal en el eje y.- En este caso la parábola es vertical y la ecuación es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{4}$$

Los elementos, en este caso, son:

El foco F(h,k+p)	El vértice V(h,k)
La longitud del lado recto $l = \|4p\|$	El eje de la parábola (eje focal) $x = h$
La ecuación de la directriz es: $y = k - p$	si $p > 0$ (positivo), entonces la parábola abre hacia la arriba. Si $p < 0$ (negativo), la parábola abre hacia la abajo

Ejemplo: *Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3,4)$ y su foco es $F(3,2)$. También escribir la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto.*

Solución: Notemos que la abscisa (valor sobre el eje x) de ambos puntos se repite y es 3, entonces, el eje focal es *paralelo al eje y*. Entonces debemos usar la fórmula:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Tomamos los valores de $V(\underbrace{3}_{h}, \underbrace{4}_{k})$ y nuestra ecuación toma la forma:

$$(x-3)^2 = 4p(y-4)$$

Sabemos que p es la distancia del foco F al vértice V, esto se reduce a $p = |\overline{FV}| = |4-2| = 2$. Pero como F está abajo de V, entonces p es negativa, esto es: $p = -2$.

Finalmente, la Ecuación de nuestra parábola es:

$$(x-3)^2 = -8(y-4)$$

La longitud del lado recto l es:

$$\begin{aligned} l &= |4p| = |a(-2)| \\ l &= 8 \end{aligned}$$

La ecuación de la directriz es:

$$\begin{aligned} y &= k - p = 4 - (-2) = 4 + 2 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

2. Elipse

Definición: Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados *focos* es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

En la figura 2 se muestran a la elipse y los elementos que la constituyen. El eje sobre el cual están los focos F y F' es el eje mayor, perpendicular a este en su punto medio, está el eje menor. Los puntos donde la elipse cruza al eje mayor se llaman vértices V y V'. el punto donde se cruzan los ejes en el centro de la elipse C. El eje mayor mide $2a$, el eje menor mide $2b$.

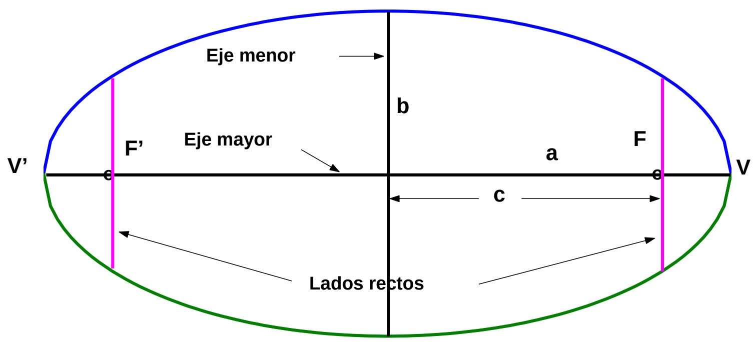

FIGURA 2: *Elementos de una elipse*

Los elementos que debemos tener en cuenta son:

- Los focos F y F'.
- Los vértices V y V'.
- La longitud del eje mayor $2a$
- La longitud del eje menor $2b$
- La distancia entre los focos $2c$
- La longitud de los lados rectos

3. Hipérbola

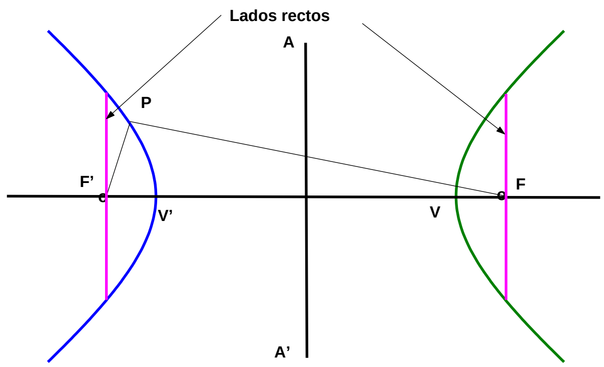

Figura 3: *Elementos de una hipérbola*