

Matemáticas Universitarias 1

Versión 2014.1 (agosto)

Enrique Morales Rodríguez

enrique.morales@correo.buap.mx



Facultad de Ciencias de la Electrónica

9 de agosto de 2014

Unidad 1

Funciones

1.1. Definición de función

En la vida cotidiana algunas cosas están relacionadas con otras, por ejemplo:

- El tiempo que tardo en ir de C.U. al Carolino depende del método de transporte que elija
- Si como mucho, engordo
- Si hago mucho ejercicio, me fortalezco
- Que obtenga un título universitario depende de que estudie mucho el cálculo, etc.

Esto plantea que el resultado de una cosa depende del comportamiento de otra, esto es, una cosa está en función de otra. A esto se le llama “*relación funcional*”.

Ley de Hooke

En la naturaleza, ocurren fenómenos que relacionan algunas cantidades con otras, por ejemplo, la ley del Hooke, que dice que el alargamiento a de un resorte es proporcional a la masa M que se le acopla, lo que escribimos en la ecuación:

$$a = kM \tag{1.1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

El volumen de una caja

Otro ejemplo de relación funcional surge cuando intentamos calcular el volumen de una caja sin tapa que se fabrica a partir de un rectángulo de cartón de área $A \times B$ como el que se muestra en la figura 1.1, al que se le cortan los cuadrados en las esquinas de $x \times x$:

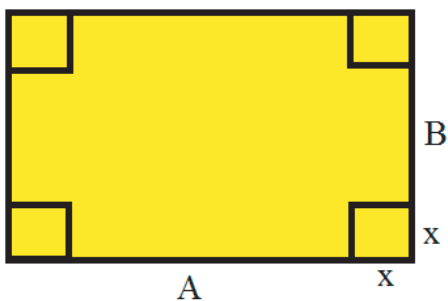


FIGURA 1.1: Rectángulo de cartón para construir una caja

La base de la caja medirá $A - 2x$ de un lado y del otro $B - 2x$ y tendrá una altura, precisamente, de x ; entonces el volumen V de la caja será:

$$\begin{aligned}
 V &= \text{Área de la base} \times \text{Altura} & (1.2) \\
 &= (A - 2x)(B - 2x)x \\
 &= (AB - 2xA - 2xB + 4x^2)x \\
 &= ABx - 2x^2(A + B) + 4x^3 \\
 V &= 4x^3 - 2(A + B)x^2 + ABx & (1.3)
 \end{aligned}$$

Y la ecuación (1.3) muestra el volumen de la caja como un polinomio que depende de la variable x

De hecho, una función surge cuando hay alguna relación entre cantidades, como la relación que existe entre una variable dependiente y respecto de una variable independiente x , por ejemplo en la relación

$$y = x^2 - 1 \quad (1.4)$$

que en palabras dice: “Para obtener el valor de y , elevamos x al cuadrado y después le restamos uno”.

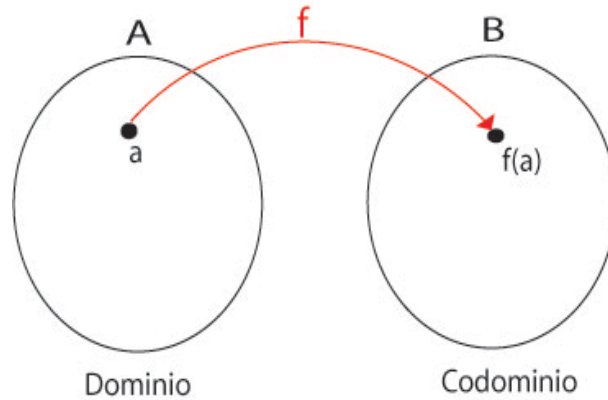
El valor de y “cambia” conforme cambia el valor de x , previa la aplicación de todo lo que se le tiene que hacer a x , que es la regla que dicta el modo en que x se relaciona con y .

Sin embargo, no todas las relaciones entre x y y son funciones. En matemáticas para que una relación pueda llamarse “función” necesita cumplir con condiciones específicas que se detallan en la siguiente definición:

Definición de función

Es una regla de asociación en la que a cada elemento de un conjunto llamado *Dominio* le corresponde uno y sólo uno de los elementos de otro conjunto llamado *Codominio*

Esto se ilustra en la figura 1.2:

FIGURA 1.2: *Función en un diagrama de conjuntos*

A la función la denotamos con la letra f , aunque también podemos usar otras letras como g , h , s , etcétera.

La variable independiente sobre la cual se aplica la regla de asociación se indica dentro de un paréntesis delante de la letra que denota a la función, por ejemplo,

$$f(x)$$

y se lee “función de equis”, aunque a menudo, de manera corta, se dice “efe de equis”.

NOTA: En este curso todas las variables estarán dentro del campo de los números reales, esto es: $x, y \in \mathbb{R}$

De igual manera podemos tener $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ o de otras variables independientes: $h(t)$, $s(r)$, $l(\omega)$, etcétera.

Así, la relación descrita en (ec. 1.4), a la que ya podemos llamar *función*, podemos escribirla como:

$$y = f(x) = x^2 - 1 \quad (1.5)$$

El dominio de la función es el conjunto de todos los elementos que hacen válida la regla de asociación.

El codominio es el conjunto de todos los elementos que resultan de aplicar la regla de asociación a cada uno de los elementos del dominio.

1.1.1. Imagen de una función

Al elemento que resulta de aplicar la regla de asociación a un elemento del dominio se le llama imagen del elemento; esto es, si $a \in \text{Dominio}$ entonces $f(a)$ es su *imagen* y $f(a) \in \text{Codominio}$; podemos decir que

$$a \in A \quad \wedge \quad f(a) \in B$$

Definición de imagen de la función

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Al conjunto

$$\text{Im}f = \{f(x) : x \in A\}$$

se le llama “*imagen de la función*”

1.2. El tamaño del dominio y del codominio

Ya hemos mencionado que en este curso todas las variables pertenecen al campo de los números reales, que es un conjunto infinito, sin embargo, para algunas funciones, el conjunto del Dominio (y el del Codominio) no siempre es el conjunto de los reales, por lo que en ocasiones, el Dominio tendrá un tamaño restringido.

Si se trata de leyes físicas, el dominio de la función estará limitado por las condiciones físicas del fenómeno, por ejemplo, en la ley de Hooke, si se acopla una masa muy grande, el resorte se estirará excesivamente que podría hasta llegar a romperse; si suponemos que la ley de Hooke se cumple para un peso máximo de $10Kg$, entonces el conjunto del dominio de la función (1.1), será:

$$0 \leq M \leq 10 \tag{1.6}$$

esto es, la masa M está dentro del intervalo entre 0 y 10: $M \in [0, 10]$. A pesar de que M pudiera tomar cualquier valor dentro de \mathbb{R} , el Dominio de la función (1.1) está formado por el conjunto de números reales entre 0 y 10.

En el ejemplo de la caja, x sólo puede tomar valores exclusivamente mayores de cero (con $x = 0$, simplemente no habría caja) y exclusivamente menores de la mitad del lado más corto (en la figura 1.1, el lado más corto es B) por la misma razón. En este caso $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{1}{2}B\}$.

En el caso de las funciones expresadas como ecuaciones, el tamaño del dominio estará determinado por las condiciones algebraicas necesarias que hagan que el conjunto esté formado exclusivamente por números reales, por lo que debemos evitar:

División entre cero.- Cuando tenemos una función que tenga fracción debemos evitar que el denominador se vuelva cero, esto es, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 8}{x^2 - 4} \tag{1.7}$$

En este ejemplo, el dominio está formado por todos los números reales excepto aquellos que provocan que $x^2 - 4 = 0$ esto es,

$$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} | x \in (-\infty, -2] \cup [-2, 2] \cup [2, \infty)\}$$

Raíz par de números negativos.- Principalmente, hablamos de la raíz cuadrada de números negativos. Si en la función tenemos una diferencia, entonces el dominio será el conjunto de números reales para los cuales el número dentro de la raíz cuadrada¹ sea positiva, por ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \quad (1.8)$$

En este caso, el Dominio de la función será el conjunto de números reales para los cuales $x^2 - 9 \geq 0$, y sabemos que si

$$x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq -3$$

entonces, $\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} | x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)\}$

1.3. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

En esta sección se describen las funciones respecto a la forma en que se relacionan los elementos del dominio y sus respectivas imágenes.

1.3.1. Función inyectiva

Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ se dirá *inyectiva* si elementos distintos de A tiene siempre imágenes distintas, esto es:

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

siempre que $a, a' \in A$

Esto se muestra en el diagrama de la figura (1.3)

Ejemplo:

La función

$$f(x) = 3x - 4 \quad (1.9)$$

Resulta inyectiva, pues cualquier número real que elijamos tendrá como resultado de aplicarle la regla de asociación una imagen diferente².

¹En general, raíz par

²Cuando veamos gráficas de funciones veremos que se puede aplicar el criterio de la recta horizontal para determinar si tal gráfica pertenece o no a una función inyectiva.

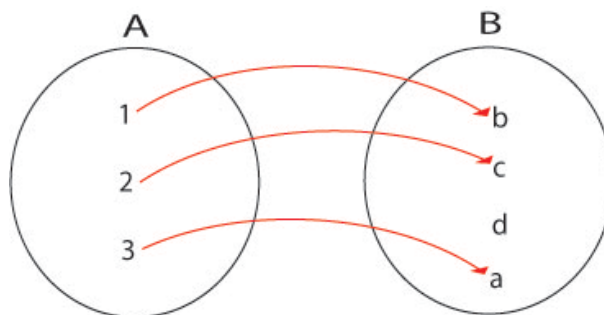


FIGURA 1.3: Diagrama de la función inyectiva

En otro ejemplo, la función

$$f(x) = x^2 \quad (1.10)$$

no es inyectiva, ya que $2 \neq -2$, ambos elementos del dominio; pero resulta que $f(2) = (2)^2 = 4 = (-2)^2 = f(-2)$, por lo que no cumple con el supuesto de la definición donde dice que las imágenes deben ser diferentes.

1.3.2. Función sobreyectiva

Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ se dirá *sobreyectiva* si para cada $b \in B$, puede hallarse $a \in A$ con la propiedad $f(a) = b$

Esto significa que f está aplicada sobre todo el codominio; esto es, que cada elemento de B es la imagen de al menos un elemento de A , como se muestra en la figura (1.4).

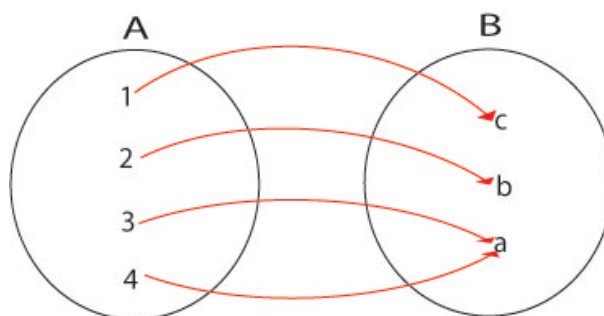


FIGURA 1.4: Diagrama de la función sobreyectiva

Y, retomando el ejemplo de la función cuadrática $f(x) = x^2$, vemos que es una función sobreyectiva, pues para dos elementos del dominio (-2 y 2) existe la misma imagen ($y = 4$).

1.3.3. Función biyectiva

Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ se dirá *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva

Esto significa que todo $b \in B$ es imagen de un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$, como se muestra en la figura (1.5), en donde se ve que la relación de los elementos con sus respectivas imágenes es uno a uno.

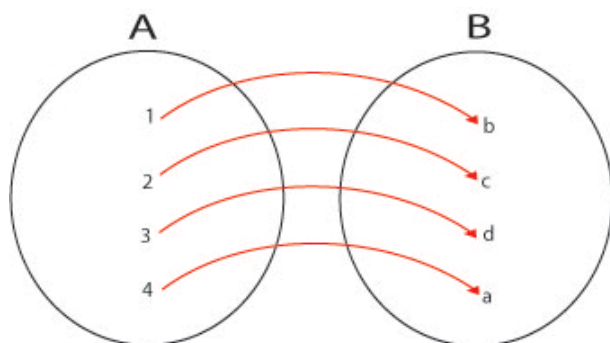


FIGURA 1.5: Diagrama de la función biyectiva

1.3.4. Función inversa

Definición

Una $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva.

La función $g : B \rightarrow A$, definida mediante la regla $g(b) = a$, donde a es tal que $f(a) = b$, se llama “función inversa” de f y la denotaremos como $g = f^{-1}$.

Se muestra un diagrama de conjuntos (1.6) de la función inversa.

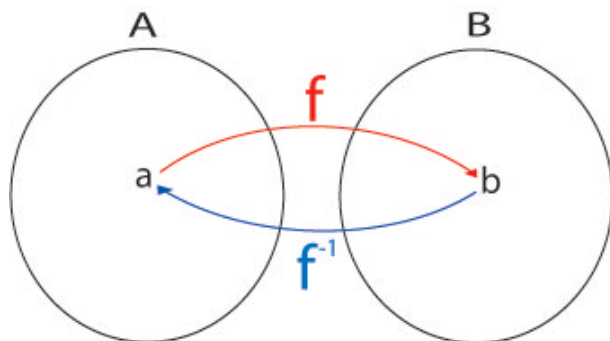


FIGURA 1.6: Diagrama de la función inversa f^{-1}

El requerimiento esencial de la definición es que la función sea biyectiva, es decir, uno a uno, puesto que la función inversa es la que nos lleva “de regreso” del Codominio al Dominio.

Una función inyectiva no tiene inversa porque puede darse el caso (como se muestra en el correspondiente diagrama de conjuntos) de que existan elementos de B que no tengan asociado ningún elemento de A .

Una función sobreyectiva no tiene inversa ya que puede darse el caso de que un elemento de B sea imagen de más de un elemento de A , como en el caso de la función cuadrática y al intentar un camino “de regreso” no se podría saber con cual de los elementos de A se asociaría.

NOTA: Debemos tener siempre presente que la notación f^{-1} es únicamente un símbolo y no debemos confundirla como si fuera el recíproco de un número real, esto es, f^{-1} no es $\frac{1}{f}$

1.3.4.1. Inversa de una sobreyectiva limitando el Dominio

En algunas ocasiones es una función sobreyectiva puede convertirse en biyectiva si limitamos el Dominio, por ejemplo, originalmente la función

$$y = f(x) = x^2$$

es sobreyectiva, por lo que si intentamos despejar x , tendríamos:

$$x = \sqrt{y}$$

la cual no es una función, pues no cumple con la definición. Cómo vimos en el ejemplo, si $y = 4$, entonces al sacar raíz cuadrada, no sabríamos si relacionarla “de regreso” con $x = 1$ o con $x = -1$.

Si limitamos el dominio por partes, tenemos dos posibilidades:

Tomando los números negativos En este caso, tenemos la función

$$x = -\sqrt{y}$$

Tomando los números positivos En este caso, tenemos la función

$$x = +\sqrt{y}$$

1.4. Función compuesta

En las secciones anteriores estaba presente una sola función con su Dominio y su correspondiente Codominio.

En esta sección estudiaremos la presencia de una segunda función cuyo Dominio será, precisamente, el Codominio de la primera función. Al resultado final se le llamará función compuesta.

Definición

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos funciones. La **composición** de f con g , denotada por $g \circ f$, es la función $g \circ f : A \rightarrow C$ tal que $\forall a \in A$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Se ilustra en el diagrama de conjuntos 1.7:

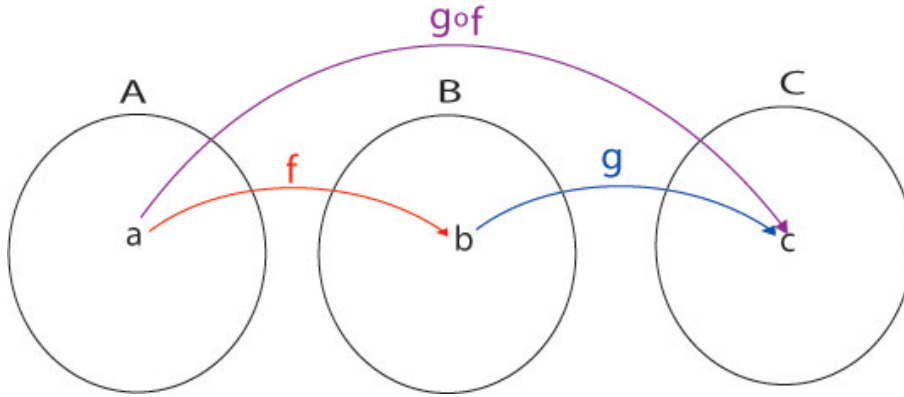


FIGURA 1.7: Diagrama de la composición de funciones

De la definición de función vemos que la primera función f actúa sobre la variable independiente x , cosa que expresamos escribiendo $f(x)$. La segunda función, g actúa sobre el codominio, que está formado por todas las imágenes $(f(a))$, entonces por eso, la parte final de la definición la escribimos $g(f(x))$, razón por lo que en ocasiones nos referimos a la composición como “función de una función”.

Ejemplo: De las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1 \\ g(x) &= 3x + 4 \end{aligned}$$

hallar $g \circ f$:

Solución:

De la definición de composición, podemos escribir:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

y la parte derecha de esta ecuación nos da la pauta para actuar: tomamos a toda la regla $f(x)$ como la variable de $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 3(x^2 - 1) + 4 \\ &= 3x^2 - 3 + 4 \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

Y podemos entonces concluir que:

$$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 1 \quad \blacksquare \quad (1.11)$$

Sin embargo, resulta que **la composición no es conmutativa**, esto es, en general tenemos que:

$$g \circ f \neq f \circ g \quad (1.12)$$

Ejemplo: Del ejemplo anterior, hallar $f \circ g$

Solución: En este ejemplo, tomamos a toda la regla $g(x)$ como la variable de f , y tenemos:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (3x + 4)^2 - 1 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 - 1 \\ &= 9x^2 + 24x + 15 \\ f \circ g &= 9x^2 + 24x + 15 \quad \blacksquare \quad (1.13) \end{aligned}$$

Con las ecuaciones (1.11) y (1.13) podemos constatar que, efectivamente, $g \circ f \neq f \circ g$.

1.5. Gráfica de una función

Sabemos que a cada elemento a del Dominio le corresponde una única imagen $f(a)$ del Codominio mediante la aplicación de la función sobre el elemento a .

Si mostramos esta asociación en un plano cartesiano, en donde el eje de las abscisas (eje x) corresponda al Dominio y el eje de las ordenadas (eje y) corresponda al Codominio, entonces cada asociación se mostrará como un par ordenado $(a, f(a))$, como se muestra en el diagrama (1.8):

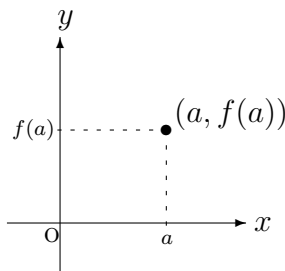


FIGURA 1.8: Un par ordenado en ubicado en un plano cartesiano

Si tomamos todos los puntos generados por todos los elementos del Dominio y sus correspondientes imágenes, en el plano cartesiano aparecerá una curva que llamaremos *gráfica de la función* siguiendo la definición:

Definición

Sean $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. La **gráfica** de f es el conjunto G_f de puntos (x, y) del plano, con $x \in D$ y $y = f(x)$. Esto es:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

La gráfica de la función que estudiamos al inicio del curso, (ec. 1.5), se muestra en la la figura (1.9).

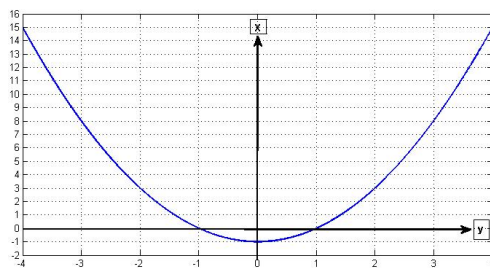


FIGURA 1.9: Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$

En el presente curso nos ocupamos únicamente de los números reales (\mathbb{R}), así que el Dominio en el eje x sólo contiene números reales y también el Codominio, en el eje y , tiene exclusivamente número reales; esto es, son dos dimensiones ambas con números reales por lo que decimos que las gráficas están en dos dimensiones de números reales, situación que de manera corta llamamos *gráficas en \mathbb{R}^2* (se lee “erre dos”)

1.5.1. Criterio de la recta vertical

Ahora que conocemos la gráfica de una función podemos ver una herramienta para determinar si una gráfica corresponde a una función.

El criterio de la recta vertical dice: “Una recta vertical tocará a la gráfica de una función **un sólo punto**. Si la recta vertical toca más de un punto, entonces tal gráfica **NO** pertenece a una función”

Por ejemplo, en la figura (1.11), se muestran dos gráficas: $y = x^2$ en azul (parábola con eje sobre el eje y) y $y = \sqrt{x}$ en rojo (parábola con eje sobre el eje x):

Si dibujamos una recta vertical (en color verde), esta tocará a la gráfica azul en un solo punto, entonces ésta pertenece a una función; a la gráfica roja la toca en dos puntos, entonces la gráfica roja **NO** es función.

Ahora se muestra en la figura (??) el hecho de que limitar el Dominio puede hacer que una relación que no es función pueda mostrarse como función. Del ejemplo dado de $y = \sqrt{x}$, limitamos al dominio en dos partes:

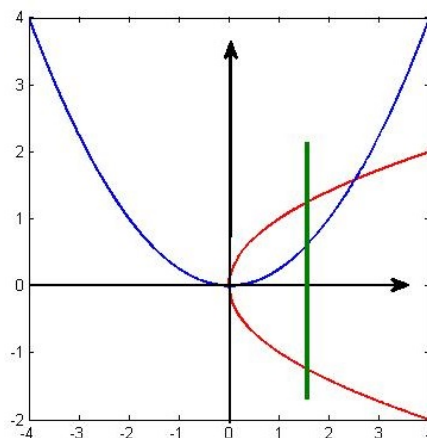


FIGURA 1.10: Prueba de la recta vertical

$$y = +\sqrt{x} \quad (1.14)$$

$$y = -\sqrt{x} \quad (1.15)$$

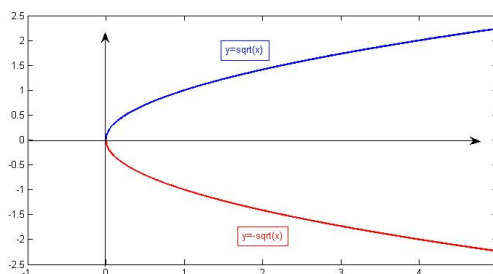


FIGURA 1.11: Dominio limitado

1.6. Propiedades de las funciones y sus gráficas

1.6.1. Función creciente

Una función es creciente en el intervalo (a, b) si y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$