Taller de herramientas matemáticas

Versión 2014.0 (septiembre)

Enrique Morales Rodríguez
enrique.morales@correo.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Electrónica

16 de noviembre de 2001

Resumen

En el estudio de todas las disciplinas técnicas y científicas es necesario hacer uso de las matemáticas en mayor o menor grado.

El estudio de la electrónica y la mecatrónica se basa completamente en las matemáticas, especialmente en el cálculo, que son las matemáticas del movimiento, por lo que es de manifiesta importancia manejar las herramientas matemáticas básicas.

Índice

Índice de tablas

1. Los números y su uso

El principio de las matemáticas son los números, por lo que conoceremos los tipos de números, con énfasis en las fracciones y la aritmética.

Durante el transcurso de todo el taller (y sería bueno que toda la vida) debemos recordar que a un número cualquiera lo acompañan varios números 1 y el signo positivo, aunque comúnmente no los escribimos. Esto es:

Sea a cualquier número:

$$a = +\frac{1a^1}{1} \tag{1}$$

es decir, el número a es **positivo**, está elevado a la **potencia 1**, **multiplicado por 1** y **dividido entre 1**.

2. Aritmética

Absolutamente todos los hombres tienen en su mente la idea de número. Esto sucede porque como seres humanos tenemos la capacidad de abstracción, capacidad que nos a hecho los dominadores del universo conocido.

Las relaciones entre los números se manifiestan de manera importante con las operaciones aritméticas que conocemos desde nuestras primeras incursiones en la educación formal: suma, resta, multiplicación y división. Este taller se enriquece agregando la potencia y la raíz, que tienen características sumamente útiles dentro del cálculo y más.

2.1. Suma

La suma de números toma una importancia relevante cuando tenemos mezclados números negativos y positivos.

2.1.1. Números negativos y positivos

Consideremos una recta numérica, tal y como la conocimos en la primaria, con una ranita mirando hacia la derecha y un signo positivo en el lomo y otra mirando hacia la izquierda, con el signo negativo en el lomo.

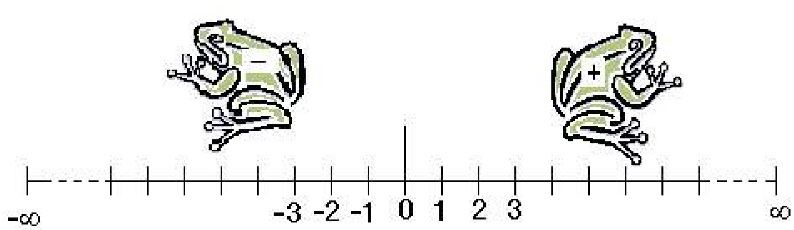

Figura 1: Recta numérica (Sistema unidimensional)

El uso de esta forma de conocer los números –principalmente los negativos– nos da la idea de que esos números "crecen" hacia donde mira la ranita; entonces los números positivos crecen hacia la derecha hasta ∞, mientras que el valor absoluto de los negativos "crece" hacia la izquierda, hasta llegar a $-\infty$.

Para sumar números negativos y positivos entremezclados, se procede como sigue:

1. Identificar los números positivos y diferenciarlos de los negativos.
2. Agrupar, para sumarlos, en una columna a los números negativos y por otro los positivos.
3. Realizar la suma de ambas columnas
4. Identificar cual es el número absoluto mayor
5. Del mayor, restar el menor
6. Al resultado, ponerle el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo:
$-1+2-43+4+22-54-67+89+3-32+45 =$¿?

$$\begin{array}{rr}
+ & - \\
2 & 1 \\
4 & 43 \\
22 & 54 \\
89 & 67 \\
3 & 32 \\
45 & \\
\hline
165 & 197
\end{array}$$

Como dijimos en el punto 4, vemos que el mayor es el 197, entonces, como dice el punto 5, de 197 restamos 165,$(197-165=32)$. El signo será negativo (-32), puesto que es el signo de 197, entonces:

$$-1+2-43+4+22-54-67+89+3-32+45=-32$$

2.2. Resta

Es relativamente sencillo notar que al pensar en los signos positivo y negativo como direcciones de los números en un sistema unidimensional (recta numérica), la resta es en realidad la suma de un número negativo a un positivo; es decir, la resta es la misma operación que la suma pero en sentido contrario.

2.3. Multiplicación

Si sumamos el mismo número repetidas veces, estamos en presencia de la multiplicación, que es, en resumen, una suma abreviada. Ejemplo:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4 \text{ veces}} = 3 \times 4 = 12 \tag{2}$$

Para la multiplicación, tenemos diferentes formas de simbolizarla [1], a saber:
Sean a y b dos números cualquiera:

Operación	**Se representa con:**
ab	Nada entre ellos (si al menos uno es literal)
$a \times b$	Una cruz
$a \cdot b$	Un pequeño punto a media altura
$a\,(b)$	Un signo de agrupación
$\{a\}\,[b]$	Dos signos de agrupación

Si multiplicamos números positivos y negativos, el resultado se rige por las leyes de los signos:

$$\boxed{\begin{array}{c} + \times + = + \\ + \times - = - \\ - \times + = - \\ - \times - = + \end{array}}$$

Tabla 1: Leyes de los signos

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4 \times (-3) &= -12 \\ (-5) \times (-2) &= +10 \end{aligned} \tag{3}$$

2.4. División

Así como la resta tiene la misma naturaleza que la suma, pero invertida, para la multiplicación tenemos como operación inversa a la división, para la cual, al igual que ella, existen diversas maneras de representar la división:
sean a y b dos números cualquiera:

$$a \div b$$
$$\tfrac{a}{b}$$

A la expresión $\frac{a}{b}$ se le llama fracción o quebrado

[1] Por signos de agrupación entenderemos que son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] o las llaves { }.

2.5. Potencia

Si tenemos multiplicaciones sucesivas, estamos en presencia de la potencia, esto es:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}} \tag{4}$$

En donde a es llamada la *base* y n se llama *exponente* (o potencia). Por ejemplo:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Con esta idea, podríamos demostrar las reglas de la potencia, que en esta ocasión, solo enunciaremos en la tabla 2.

2.6. Raíz

La operación inversa de la potencia es la raíz, y podemos decir que un número es raíz de otro si al elevarlo a la potencia dada, se obtiene el primer número.

$$c = \sqrt[n]{a} \quad \Rightarrow \quad c^n = a \tag{5}$$

lo que en palabras quiere decir: "c es la raíz n-ésima de a si c a la n es igual a a".

Además, podemos definir un radical como una potencia fraccionaria; esto es:

$$\sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

En general, si a está elevada a alguna potencia m dentro del radical de grado n, tenemos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \tag{7}$$

Las reglas para la radicación, entonces, se muestran en la tabla 2:

Sean a , b , n y m cualquier número:

Potencias	**Potencia fraccionaria**	**Radicales**
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$	
$(a^n)^m = a^{n \times m}$		$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$		$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Tabla 2: Reglas de potenciación y radicación

2.7. Prioridad de la operaciones

En capítulos anteriores vimos que las operaciones aritméticas son algunas inversas de otras, y nos debemos preguntar, ¿Cuales se realizan primero y cuales después?.

En primer lugar identifiquemos cuales son las operaciones inversas unas de otras.

Operación directa	**Operación inversa**
Suma	Resta
Multiplicación	División
Potencia	Raíz

Tabla 3: Operaciones inversas

A propósito la tabla 3 fue ordenada de menor a mayor dificultad en la realización.

El orden de prioridad es:

1. Raíz
2. Potencia
3. División
4. Multiplicación
5. Resta
6. Suma

Primero se hacen la raíz y la potencia, después división y multiplicación y al último la resta y la suma.

3. Fracciones

El tema de fracciones necesita un capítulo aparte debido a la dificultad intrínseca de la división (no debemos olvidar que una fracción es una división indicada), además de que las técnicas utilizadas para resolver las operaciones aritméticas entre las fracciones a veces causan confusión.

Una fracción es algo como:

$$\frac{a}{b} \tag{8}$$

Y al número de arriba (a) se le llama *numerador* y al de abajo (b) se le llama *denominador*. Para recordar esto propongo un recurso mnemotécnico: el *numerador* es el **número** de rebanadas de pastel que me tocan, mientras que el *denominador* son las rebanadas en que se dividió **todo** el pastel.

Una fracción es **negativa** en los siguientes casos (el número de signos negativos es impar):

$$-\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{b}, \qquad \frac{a}{-b}, \qquad -\frac{-a}{-b} \tag{9}$$

y **positiva** en los siguientes casos (el número de signos negativos es par):

$$\frac{a}{b}, \qquad -\frac{-a}{b}, \qquad -\frac{a}{-b}, \qquad \frac{-a}{-b} \tag{10}$$

3.1. Suma y resta

Una vez más repetimos que en el sistema unidimensional (como la recta numérica) podemos considerar a la suma y a la resta como la misma operación por lo que las consideramos al mismo tiempo.

Para la suma y resta tenemos diferentes casos:

3.1.1. Con el mismo denominador

Cuando tenemos suma o resta de fracciones con el mismo denominador, en el resultado se escribe el mismo denominador y únicamente se suman o restan los numeradores para formar la fracción resultante. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3+7-4}{5}=\frac{6}{5} \tag{11}$$

3.1.2. Con diferente denominador

Cuando tenemos diferente denominador, la cosa se complica, por lo que hacemos uso del *mínimo común múltiplo*, que se obtiene de la siguiente manera:

3.1.2.1. mínimo común múltiplo

<u>Es el menor número que divide a todos exactamente.</u>

El mcm se obtiene por el método de factores primos[2], por ejemplo:
Hallar el mcm de $2, 6, 12, 7$ y 14 :

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & 12 & 7 & 14 & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 3 & 6 & 7 & 7 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 7 & \mathbf{7} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Entonces el mcm es: $mcm = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

Para hallarlo se procede como sigue:

[2] Un número primo es aquel que se divide de manera exacta únicamente entre sí mismo y la unidad.

1. Se alínean los números y se dibuja una raya debajo de ellos y otra a la derecha del último.
2. A la derecha del último número se escribe el primer número primo (el número 2), y se divide cada uno de los números en cuestión, escribiendo el resultado debajo del número. Si no tiene división, se escribe el mismo número en vez del resultado.
3. En la nueva línea formada se intenta dividir entre el mismo número primo anterior hasta que ya no haya números que se dividan exactamente.
4. Se prosigue con el siguiente número primo (el 3), y si no hay números que se dividan entre éste, entonces se sigue con los números primos mayores, hasta encontrar los que sí dividan exactamente.
5. El proceso de búsqueda termina cuando debajo de los números quede una línea de 1's.
6. El mínimo común múltiplo será la multiplicación de todos los números primos encontrados en la columna a la derecha de la raya.

Cuando se ha hallado el mcm, este será el denominador del resultado y ya entonces se procede, con un ejemplo, como sigue:

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}\stackrel{?}{=}$$

1. El mcm es el denominador del resultado

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{\quad}{84}$$

2. Se divide el mcm entre el denominador de la primera fracción

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{\underset{\Uparrow}{2}}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14} & = & \frac{\quad}{\underset{\Uparrow}{84}} \\ 84\div 2 & = & 42 \end{array}$$

3. El resultado se multiplica por el numerador de la misma fracción y este resultado se escribe en el espacio del numerador para la fracción resultante.

$$42\times 3=126$$

$$\frac{\overset{\Downarrow}{3}}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14} = \frac{126\qquad\qquad}{84}$$

4. Se copia el signo delante de la primera fracción y se escribe delante del primer resultado sobre el mcm.

$$\frac{3}{2}\overset{\Downarrow}{-}\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{126\overset{\Downarrow}{-}\qquad\qquad}{84}$$

5. se sigue así con todas las fracciones componentes.

$$\frac{3}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{12}+\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{126-70+21+24-6}{84}=\frac{95}{84}$$

3.2. Multiplicación

La multiplicación se realiza de una manera bastante sencilla: Se multiplica numerador por numerador y es el numerador del resultado. Se multiplica denominador por denominador y será el denominador del resultado. Esto es:

$$\frac{a}{b} \times \frac{g}{h} = \frac{a \times g}{b \times h} = \frac{ag}{bh}$$

es claro que también se aplicarán las reglas de los signos, además, la recíproca también es válida, es decir:

$$\frac{ag}{bh} = \frac{a}{b} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a}{h} \cdot \frac{g}{b} \tag{12}$$

En la ecuación (12) también puede aplicarse que el orden de los factores no altera el producto.

3.3. División

Una idea que me parece buena para aprenderla es considerar a la división como producto cruzado. Esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{g}{h} = \frac{\overset{a \searrow}{\times}}{b} \div \frac{g}{\underset{=}{h \nearrow}} = \frac{a \times h}{b \times g} = \frac{ah}{bg} \tag{13}$$

Se empieza con el numerador de la primera fracción (dividendo) multiplicado por el denominador de la segunda fracción (divisor) y será el numerador del resultado (cociente); después, el denominador de la primera fracción multiplicado por el numerador de la segunda fracción y será el denominador del resultado

3.4. Fracciones complejas

Por fracciones complejas entendemos que son las fracciones del tipo:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} \tag{14}$$

Esto es, el numerador o el denominador o ambos son fracciones.

En la ecuación (14), vemos que la primera fracción es el numerador y la segunda es el denominador de una fracción compleja, esto es, es una *división de fracciones* y puede aplicarse entonces el método mostrado en la ecuación (13); expresada de esta forma se vería:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{g}{h}} = \frac{a}{b} \div \frac{g}{h} = \frac{a \times h}{b \times g} = \frac{\text{extremo} \times \text{extremo}}{\text{medio} \times \text{medio}} = \frac{ah}{bg} \tag{15}$$

y a la ecuación (15) se le llama **Regla de la herradura**.

3.4.1. Reducción de fracciones complejas

Las fracciones complejas se pueden reducir a una sola fracción, por ejemplo:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1+\frac{2}{3}}{5}}{6+\frac{4}{5}}$$

lo primero que se debe hacer es realizar las operaciones en los numeradores y denominadores más externos para poder empezar a reducir por el método de la herradura:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{\overbrace{1+\dfrac{2}{3}}}{5}}{6+\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\frac{3+2}{3}}{5}}{6+\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}+\left.\frac{\frac{5}{3}}{5}\right\}}{6+\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{1}}}{6+\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5\times 1}{3\times 5}}{6+\frac{4}{5}}=$$

$$\frac{\overbrace{\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{15}}}{\underbrace{\dfrac{6}{1}+\dfrac{4}{5}}}=\frac{\frac{15+10}{30}}{\frac{30+4}{5}}=\left.\frac{\frac{25}{30}}{\frac{34}{5}}\right\}=\frac{25\times 5}{30\times 34}=\frac{25\times 5}{6\times 5\times 34}=\frac{25}{6\times 34}\times\frac{5}{5}=\frac{25}{6\times 34}\times 1=\frac{25}{204}$$

En este ejercicio[3], las llaves arriba y abajo muestran los casos cuando se hace suma o resta de fracciones, mientras que las llaves a la derecha, señalan reducción de fracciones complejas por el método de la herradura.

Es obvio que un único ejemplo no es suficiente para entender el proceso, pero se pueden hacer más ejercicios en esta parte.

[3]También se ha hecho uso de la propiedad de que $\frac{5}{5}=1$ y de que $a\times 1=a$

4. Álgebra

El álgebra utiliza letras y números para representar cantidades. Es una parte primordial durante el aprendizaje de las matemáticas, por lo que necesitamos conocer algunas definiciones.

4.1. Definiciones

Como si fuera un lenguaje, dentro del álgebra debemos conocer algunas palabras que nos indican algo en especial, por lo que tenemos:

Constante Es una cantidad que no cambia durante el proceso de solución matemática. Está representada por las primeras letras del alfabeto: $a, b, c, d...$

Variable Es una cantidad que cambia en alguna forma dentro del proceso matemático. Distinguimos dos tipos de variables: **independiente**, que es la que está determinada por sí misma y **dependiente**, que varía de una manera relacionada a la variable independiente. Está representada por las últimas letras del alfabeto: $x, y, z, q...$, por ejemplo, en la ecuación $y = 6x^2 - 3$, tenemos que:

$$\underbrace{y}_{\text{Variable dependiente}} = 6 \underbrace{x^2}_{\text{Variable independiente}} -3 \tag{16}$$

Término Es una expresión que está separada de otra por un signo "más" $(+)$ o "menos" $(-)$.

Coeficiente Es el número que multiplica a una variable (pueden ser de varios números).

Miembro Es una expresión algebraica separada de otra por el signo "igual" $(=)$. En resumen, algunas definiciones se muestran en el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{a}^{\text{Coeficiente}} \overbrace{z}^{\text{Variable}}}_{\text{Término}} +by}_{\text{Miembro}} = cw - dx \tag{17}$$

Grado de una variable Es el exponente al que está elevada una variable, por ejemplo:

$$x^2$$

es de segundo grado pues x está elevada a la potencia 2.

Grado de un polinomio Es el grado del término de máximo grado en el polinomio, por ejemplo:

$$3x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 2 \tag{18}$$

es de cuarto grado, pues el término de mayor grado es $3x^4$ y x está elevada a la potencia 4.

Términos semejantes Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal (letra) elevada a la misma potencia, por ejemplo:

$$2a \text{ y } -5a, \;\; x^{m+1} \text{ y } 3x^{m+1}$$

4.2. Polinomios

Cuando una expresión algebraica consta de dos o más términos recibe el nombre de polinomio, por ejemplo:

$$3x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 2$$

Tenemos dos casos especiales que son muy utilizados.

Cuando la expresión consta únicamente de dos términos, se llama **binomio**, por ejemplo:

$$x + 1$$

Cuando la expresión consta de tres términos se llama **trinomio**, como la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c$$

4.2.1. Reducción por términos semejantes

Para la reducción por términos semejantes se procede como sigue:

1. Se identifican los términos semejantes, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b - \frac{3}{5}ab + 3b - \frac{1}{3}a^2 + 2ab + 2x$$

en este caso, tenemos tres términos semejantes diferentes entre ellos: a^2, b y ab. Y $2x$ no tiene semejante.

2. Se escribe primero el término semejante y se abre paréntesis en cada caso:

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b - \frac{3}{5}ab + 3b - \frac{1}{3}a^2 + 2ab + 2x = a^2(\qquad +b(\qquad +ab(\qquad +2x$$

3. Dentro de los paréntesis, escribir los coeficientes de los términos semejantes, con sus respectivos signos:

$$\frac{\overset{\Downarrow}{1}}{2}a^2 + \frac{1}{\underset{\uparrow}{3}}b - \frac{3}{5}ab \underset{\uparrow}{+}\overset{\Downarrow}{3}\, b - \frac{\overset{\Downarrow}{1}}{3}a^2 + 2ab + 2x = a^2\left(\frac{\overset{\Downarrow}{1}}{2} - \frac{\overset{\Downarrow}{1}}{3}\right) + b\left(\frac{1}{\underset{\uparrow}{3}} + \underset{\uparrow}{3}\right) + ab\left(-\frac{3}{5} + 2\right) + 2x$$

4. Efectuar las operaciones dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned} a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + b\left(\frac{1}{3} + 3\right) + ab\left(-\frac{3}{5} + 2\right) + 2x &= a^2\left(\frac{1}{6}\right) + b\left(\frac{10}{3}\right) + ab\left(\frac{7}{5}\right) + 2x \\ &= \frac{1}{6}a^2 + \frac{10}{3}b + \frac{7}{5}ab + 2x \end{aligned}$$

4.2.2. Suma de polinomios

Para sumar polinomios, debemos acomodar los polinomios uno debajo de otro de modo que los términos semejantes queden en columna. Si no hay término semejante, se deja el espacio vacío.

La suma se realiza aplicando en las columnas la reducción por términos semejantes.

Por ejemplo, si sumamos $a - b$, $2a + 3b - 3c$ y $2c - 4a$:

$$\begin{array}{ccc} a & -b & \\ 2a & +3b & -3c \\ -4a & & +2c \\ \hline -a & +2b & -c \end{array}$$

y el resultado será: $-a + 2b - c$

4.2.3. Resta de polinomios

Para la resta procedemos casi de la misma manera; la diferencia radica en que en el polinomio sustraendo se cambian de signo todos los términos (lo que equivale a multiplicar por -1) y se suma al sumando, por ejemplo: a $4x - 3y + z$, restarle $2x + 5z - 6$.

Cambiando de signo al sustraendo, queda $-2x - 5z + 6$, entonces sumamos:

$$\begin{array}{cccc} 4x & -3y & +z & \\ -2x & & -5z & +6 \\ \hline 2x & -3y & -4z & +6 \end{array}$$

el resultado de la resta es: $2x - 3y - 4z + 6$.

4.2.4. Multiplicación de polinomios

En la multiplicación de polinomios debemos tener muy en cuenta las leyes de los signos, ya descritos en la tabla 1, en la página 5 de este manual y las reglas de potenciación de la página 6.

Esta multiplicación se realiza término a término, lo cual quiere decir que se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del otro, por ejemplo: multiplicar $x^3 - 3x + 2$ por $x^4 + 2x^2 - 3$.

1. Se multiplica término a término:

$$\begin{aligned}
\left(x^3 - 3x + 2\right)\left(x^4 + 2x^2 - 3\right) &= x^3 \cdot x^4 + x^3 \cdot 2x^2 + x^3 \cdot -3 \\
&\quad + (-3x) \cdot x^4 + (-3x) \cdot 2x^2 + (-3x) \cdot -3 \\
&\quad +2 \cdot x^4 + 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot -3 \\
&= x^{3+4} + 2x^{3+2} - 3x^3 - 3x^{1+4} - 6x^{1+2} + 9x \\
&\quad +2x^4 + 4x^2 - 6 \\
&= x^7 + 2x^5 - 3x^3 - 3x^5 - 6x^3 + 9x + 2x^4 + 4x^2 - 6
\end{aligned}$$

2. Se reducen términos semejantes:

$$\begin{aligned} x^7+2x^5-3x^3-3x^5 &- 6x^3+9x+2x^4+4x^2-6 = x^7+x^5(2-3)+x^3(-3-6) \\ &\quad +9x+2x^4+4x^2-6 \\ &= x^7-x^5-9x^3+9x+2x^4+4x^2-6 \end{aligned}$$

3. Se ordenan los términos en orden descendente:

$$\left(x^3-3x+2\right)\left(x^4+2x^2-3\right)=x^7-x^5+2x^4-9x^3+4x^2+9x-6$$

4.2.4.1. Productos notables Existen algunos productos que tienen una solución especial, llamados productos notables, por ejemplo:

4.2.4.1.1. Binomios conjugados Son binomios del tipo $(a-b)(a+b)$. Al realizar la multiplicación indicada obtenemos:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$$

entonces se dice que "*el producto de binomios conjugados es una diferencia de cuadrados*"; así que por simple inspección debemos escribir:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

4.2.4.1.2. Binomio al cuadrado Si tenemos un binomio del tipo $(a \pm b)^2$, entonces, al realizar el producto indicado, obtenemos:

$$(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)=a^2\pm ab\pm ba+b^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

el producto resultante se dice que es un trinomio cuadrado perfecto; esto es: "*el cuadrado del primero, más/menos el doble producto del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado*", igualmente, por simple inspección debemos escribir:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

4.2.5. División de polinomios

Tenemos diferentes opciones, empezando por considerar:

4.2.5.1. división de un polinomio entre un monomio. Por ejemplo. si tomamos la división de $2a^xb^m-6a^{x+1}b^{m-1}-3a^{x+2}b^{m-2}$ entre $-2a^3b^4$, procedemos como sigue:

1. Expresamos la división como una fracción:

$$2a^xb^m-6a^{x+1}b^{m-1}-3a^{x+2}b^{m-2}\div -2a^3b^4=\frac{2a^xb^m-6a^{x+1}b^{m-1}-3a^{x+2}b^{m-2}}{-2a^3b^4}$$

2. Aplicamos la propiedad expresada por la ecuación (12) (página 10 de este manual), y tenemos:

$$\frac{2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}}{-2a^3b^4} = -\frac{2a^xb^m}{2a^3b^4} + \frac{6a^{x+1}b^{m-1}}{2a^3b^4} + \frac{3a^{x+2}b^{m-2}}{2a^3b^4}$$

   Es claro que también se aplican directamente las reglas de los signos para una fracción (ecuaciones (9) y (10) de la página 8).

3. Aplicamos la división de números y las reglas para la división de potencias (página 6):

$$\begin{aligned} -\frac{2a^xb^m}{2a^3b^4} + \frac{6a^{x+1}b^{m-1}}{2a^3b^4} + \frac{3a^{x+2}b^{m-2}}{2a^3b^4} &= -a^{x-3}b^{m-4} + 3a^{x+1-3}b^{m-1-4} + \frac{3}{2}a^{x+2-3}b^{m-2-4} \\ &= -a^{x-3}b^{m-4} + 3a^{x-2}b^{m-5} + \frac{3}{2}a^{x-1}b^{m-6} \end{aligned}$$

4.2.5.2. División entre dos polinomios

Dividir $2x + 3x^2 - 8$ entre $x + 2$.

1. Se ordenan tanto el dividendo $(2x + 3x^2 - 8)$ como el divisor $(x + 2)$ con respecto a una misma letra (en nuestro caso, con respecto a la x)

$$3x^2 + 2x - 8 \;\big|\; \underline{x+2}$$

2. Se divide el primer término del dividendo $(3x^2)$ entre el primer término del divisor (x):

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

   y es el primer término del cociente.

3. Se escribe este primer término del cociente bajo el arreglo del punto 1:

$$\begin{array}{ll} 3x^2 + 2x - 8 & |\underline{x+2} \\ & 3x \end{array}$$

4. Se multiplica este primer término $(3x)$ por cada uno de los términos del divisor, se les cambia de signo y se escriben bajo el dividendo para ser sumados a él.

$$3x \cdot x = 3x^2; \underline{-3x^2} \qquad 3x \cdot 2 = 6x; \underline{-6x}$$

$$\begin{array}{ll} +3x^2 + 2x - 8 & |\underline{x+2} \\ \underline{-3x^2 - 6x} & 3x \\ \quad\;\; -4x & \end{array}$$

5. Bajamos el siguiente término del dividendo (-8)

$$\begin{array}{ll} +3x^2 + 2x - 8 & |\underline{x+2} \\ \underline{-3x^2 - 6x} & 3x \\ \quad\;\; -4x - 8 & \end{array}$$

6. Dividimos el nuevo primer término ($-4x$) entre el primer término del divisor (x) y este será el segundo término del cociente:

$$\frac{-4x}{x} = -4$$

$$\begin{array}{rl} +3x^2 + 2x - 8 & \underline{|x+2} \\ \underline{-3x^2 - 6x\phantom{{}-8}} & 3x-4 \\ -4x - 8 & \end{array}$$

7. Multiplicamos este segundo término (-4) por el divisor($x+2$), le cambiamos de signo, lo colocamos abajo y sumamos:

$$-4 \cdot x = -4x; \underline{4x} \qquad -4 \cdot 2 = -8; \underline{8}$$

$$\begin{array}{rl} +3x^2 + 2x - 8 & \underline{|x+2} \\ \underline{-3x^2 - 6x\phantom{{}-8}} & 3x-4 \\ -4x - 8 & \\ \underline{+4x + 8} & \\ 0\phantom{{}+8} & \end{array}$$

8. Cuando ya no tenemos más términos en el dividendo, hemos terminado.

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{x+2} = 3x - 4$$

En nuestro ejemplo, el último número bajo el dividendo es cero. A este número se le llama <u>**residuo**</u>.

Existe otra manera de dividir, la única diferencia es que no se escribe la variable sino únicamente los coeficientes, lo demás es idéntico; a este método se le llama: por **coeficientes separados** (y no se muestra en estas notas).

4.2.5.2.1. Teorema del residuo En el caso anterior el residuo era cero, pero no siempre es así, por ejemplo:

$$\begin{array}{rl} +x^3 - 7x^2 + 17x - 6 & \underline{|x-3} \\ \underline{-x^3 \;\; + 3x^2}\phantom{{}+17x-6} & x^2 - 4x + 5 \\ -4x^2 + 17x\phantom{{}-6} & \\ \underline{+4x^2 - 12x}\phantom{{}-6} & \\ 5x - 6 & \\ \underline{-5x + 15} & \\ 9 & \end{array}$$

En donde se observa que el residuo es 9, ya que la división no es exacta.

Si sustituimos el valor del divisor (3), por la x del dividendo, tenemos:

$$(3)^3 - 7\,(3)^2 + 17\,(3) - 6 = 27 - 63 + 51 - 6 = 9$$

Entonces, tenemos el teorema del residuo, que dice:

"El residuo de dividir un polinomio entero y racional en ***x*** *por un binomio de la forma* ***x-a*** *se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la* ***x*** *por* ***a****".*

4.2.5.3. División sintética Podemos hallar el cociente y el residuo de la división de un polinomio entre un binomio del tipo $x - a$ por medio de la división sintética. Explicaremos con un ejemplo:

Dividir $x^3 - 5x^2 + 3x + 14$ entre $x - 3$.

1. Se escriben los coeficientes del dividendo y separado el valor de a. En nuestro caso, 3, que es el segundo término del divisor pero con el signo cambiado.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & +3 & 14 & +3 \\ \hline \end{array}$$

2. Se escribe abajo, el primer término del dividendo (el 1) y será el primer término del cociente.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & +3 & 14 & +3 \\ & & & & \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$

3. Este primer término del cociente (1) se multiplica por el segundo término del divisor (+3) y el resultado se escribe bajo el coeficiente del segundo término del dividendo (−5).

$$1 \times (+3) = 3$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & +3 & 14 & +3 \\ & 3 & & & \\ \hline 1 & & & & \end{array}$$

4. Se realiza la suma de este resultado con el coeficiente del segundo término:

$$-5 + 3 = -2$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & +3 & 14 & +3 \\ & 3 & & & \\ \hline 1 & -2 & & & \end{array}$$

5. Este nuevo resultado (el de la suma, −2), se multiplica por el segundo término del divisor (+3), y se escribe bajo el término que sigue y se realiza la suma, y así sucesivamente, hasta terminar:

$$-2 \times +3 = -6$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & +3 & 14 & +3 \\ & 3 & -6 & -9 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{1 \quad -2 \quad -3}_{cociente}} & \underbrace{+5}_{residuo} & \end{array}$$

6. En los números de la línea de abajo están los coeficientes del cociente y el residuo. El residuo es el último número y los números restantes son el cociente, que será **un grado menos** que el dividendo, entonces queda:

$$x^2 - 2x - 3 \qquad \text{y el residuo es } 5$$

finalmente el resultado es:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 14}{x-3} = x^2 - 2x - 3 + \frac{5}{x-3}$$

NOTA: Un uso interesante es el de que se pueden encontrar las raíces de un polinomio por este método (al hacer que el residuo sea cero).

4.3. Ecuaciones de primer grado

Una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas. Por ejemplo:

$$5x + 2 = 17 \tag{19}$$

Para hallar la solución a una ecuación, se siguen las siguientes reglas:

- Una cantidad que está sumando pasa al otro miembro restando.
- Una cantidad que está dividiendo pasa al otro miembro multiplicando.
- Una potencia pasa al otro miembro como raíz del mismo grado.

Estas operaciones no alteran de ningún modo a la ecuación. En nuestro ejemplo, nuestro interés se centra en encontrar el valor de x que hace verdadera la ecuación (19), entonces tenemos:

$$\begin{aligned} 5x + 2 &= 17 \\ 5x &= 17 - 2 \\ x &= \frac{17-2}{5} = \frac{15}{5} = 3 \qquad \text{y la solución es } x = 3. \end{aligned}$$

También es importante que primero se resuelvan las operaciones que haya dentro de los paréntesis, y si se puede, resolver las fracciones indicadas. Por ejemplo: Hallar x en la siguiente ecuación:

$$3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$$

primero, eliminamos los signos de agrupación[4]:

$$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24$$

después, agrupamos en el primer miembro a todos los términos que contienen a x:

$$3x - 2x - 7x - 5x + x = -3 + 24 + 1$$

sacando a la x como factor común, tenemos:

$$\begin{aligned} x\,(3 - 2 - 7 - 5 + 1) &= -3 + 24 - 1 \\ -10x &= 20 \\ x &= \frac{20}{-10} = -2 \qquad \text{y el resultado es } x = -2. \end{aligned}$$

[4] Obviamente, aplicando las reglas de los signos

4.4. Factorización

Si tenemos un polinomio, en general es deseable expresarlo como una multiplicación de factores binomiales, por ejemplo, el polinomio

$$3x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + x + 1 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \tag{20}$$

en donde el problema principal es determinar las constantes a, b, c, d y e.

Los primeros casos de factorización que abordaremos son los referentes a los *productos notables* (ver página [15])

4.4.1. Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados se factoriza como un producto de binomios conjugados[5]:

Factorizar $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$:

1. Se saca la raíz cuadrada de ambos términos:

$$\begin{array}{ccc} \frac{a^2}{4} & - & \frac{b^4}{9} \\ \frac{a}{2} & & \frac{b^2}{3} \end{array}$$

2. Se escriben estas raíces como los términos de los binomios; al primer binomio se le pone signo positivo entre los miembros y al segundo un signo negativo:

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right)$$

4.4.2. Trinomios cuadrados perfectos

Un trinomio cuadrado perfecto es el resultado de un binomio al cuadrado:

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 = (x-a)(x-a)$$

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se procede de la siguiente manera: Factorizar $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4$

1. Se saca la raíz cuadrada del primer y tercer término:

$$\begin{array}{lcr} 1 - 16ax^2 & + & 64a^2x^4 \\ 1 & & 8ax^2 \end{array}$$

2. La primera raíz es el primer término del binomio y la segunda raíz es el segundo término del mismo binomio. El signo entre los dos términos del binomio es el del segundo término del trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{array}{lcr} 1 \overset{\Downarrow}{-} 16ax^2 & + & 64a^2x^4 \\ 1 & & 8ax^2 \end{array} \quad = \left(1 \overset{\Downarrow}{-} 8ax^2\right)^2$$

[5]Recordemos: Binomios conjugados son aquellos que tienen las mismas literales, pero con uno de los signos contrario: por ejemplo: $(a+b)(a-b)$

4.4.3. Completar el Trinomio Cuadrado Perfecto

1. En caso de que la expresión algebraica no sea un trinomio cuadrado perfecto, se puede tratar de completar por adición o sustracción. Por ejemplo: Factorizar $x^4 + x^2y^2 + y^4$:

2. Se saca la raíz de los términos cuadráticos:

$$\begin{array}{lcr} x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ x^2 \qquad\qquad\quad y^2 \end{array} \tag{21}$$

3. Sabemos que para tener un trinomio cuadrado perfecto, el término de enmedio debe ser "*el doble producto del primero por el segundo*", esto es:

$$2 \times x^2 \times y^2 = 2x^2y^2$$

   entonces notamos que en nuestro ejemplo esta una sola vez, así que:

4. Sumamos y restamos la cantidad[6] que falta: $2x^2y^2$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

5. Y tenemos un trinomio cuadrado perfecto más un término extra:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2$$

6. Sorpresa: en nuestro ejemplo tenemos ahora ¡una diferencia de cuadrados! (esto sucede a menudo), que también factorizamos:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 &= \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 \\ &= \left(x^2 + y^2 + xy\right)\left(x^2 + y^2 - xy\right) \\ &= \left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) \end{aligned}$$

4.4.4. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Cuando tenemos un trinomio que no es cuadrado perfecto, entonces puede ser de la forma $x^2 + bx + c$. Para factorizar estos trinomios se procede como sigue:

Factorizar $x^2 - 7x + 12$

1. El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es x :

$$x^2 - 7x + 12 = (x \qquad)(x \qquad) \tag{22}$$

2. En el primer factor se escribe el signo del segundo término del trinomio:

$$x^2 \overset{\Downarrow}{-} 7x + 12 = \left(x \overset{\Downarrow}{-} \qquad\right)(x \qquad)$$

[6] Recordemos que $a + 0 = a$, entonces: $x^2y^2 - x^2y^2 = 0$ y la ecuación no se altera (el cero se llama neutro aditivo).

3. En el segundo factor se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término por el del tercer término del trinomio:

$$\begin{array}{l} \underset{\uparrow}{-} \times \underset{\uparrow}{+} = \overset{\Downarrow}{-} \\ x^2 \underset{\uparrow}{-} 7x \underset{\uparrow}{+} 12 = (x - \quad\quad)\left(x \overset{\Downarrow}{-} \quad\quad\right) \end{array}$$

4. Si ambos factores tienen el mismo signo, se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término y el producto se el valor absoluto del tercero. Estos son los segundos términos de los binomios.

$$\begin{array}{l} 3+4=7 \qquad 3 \times 4 = 12 \\ x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) \end{array}$$

4.4.5. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Cuando tenemos un trinomio de esta forma, en que el coeficiente del primer término no es 1 , por ejemplo $6x^2 - 7x - 3$, procedemos casi de la misma forma. Por ejemplo, factorizar $6x^2 - 7x - 3$:

1. Multiplicamos todo el trinomio por el coeficiente del primer término (en nuestro ejemplo, por 6), haciendo la multiplicación del primer y tercer término y dejando indicada la multiplicación en el segundo término y dividiendo todo entre el mismo número, para no alterar la expresión algebraica[7]:

$$\frac{6\,(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{6(6x^2) - 6\,(7x) - 6\,(3)}{6}$$

2. Notamos que $6(6x^2) = 6 \cdot 6x^2 = 6^2x^2 = (6x)^2$ y como el orden de los factores no altera el producto, cambiamos el orden de los coeficientes en el segundo término, $6(7x)$, y realizando la multiplicación del tercer término, $6(3) = 18$, entonces queda:

$$\frac{6(6x^2) - 6\,(7x) - 6\,(3)}{6} = \frac{(6x)^2 - 7\,(6x) - 18}{6}$$

3. Podemos trabajar como en el caso anterior, pero ahora la raíz cuadrada del primer término tendrá un coeficiente diferente de cero $(6x)$. Claro, siempre trabajando en el numerador:

$$\frac{(6x)^2 - 7\,(6x) - 18}{6} = \frac{(6x \quad\quad)(6x \quad\quad)}{6}$$

[7]Recordemos que al multiplicar y dividir por la misma cantidad no se altera nuestra expresión algebraica, pues es igual a multiplicar por 1 (el 1 se llama *neutro multiplicativo*)

4. El resto (en el numerador) se procede como en el caso anterior. En nuestro ejemplo, los numeros encontrados son :

$$\begin{aligned} -9+2 &= \overset{\Downarrow}{-7} \qquad 9\times 2 = \overset{\searrow}{18} \\ \frac{(6x)^2 - \overset{\Downarrow}{7}\,(6x) - \overset{\searrow}{18}}{6} &= \frac{(6x-9)\,(6x+2)}{6} \end{aligned}$$

5. Intentamos encontrar una expresión sin fracción. Esto se logra partiendo el denominador de tal manera que sea dos fracciones (una para cada binomio) y reducir. En nuestro caso $6 = 3\times 2$:

$$\begin{aligned} \frac{(6x-9)\,(6x+2)}{6} &= \frac{(6x-9)\,(6x+2)}{3\times 2} = \frac{(6x-9)}{3}\times\frac{(6x+2)}{2} \\ &= \frac{3\,(2x-3)}{3}\times\frac{2\,(3x+1)}{2} = \frac{3}{3}\,(2x-3)\times\frac{2}{2}\,(3x+1) \\ &= (2x-3)\,(3x+1) \end{aligned}$$

4.5. Ecuaciones de segundo grado

Ya vimos en la página 12 qué es el grado de un polinomio. Se llama ecuación de segundo grado a aquella en que uno de los miembros consta de un polinomio de segundo grado. Por ejemplo: $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Se llama solución de una ecuación al valor de la incógnita que cumple completamente con la igualdad. Se sabe que en general existen el mismo número de soluciones (o raíces) que el grado de la ecuación, por esto, una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

La factorización es una forma de solucionar ecuaciones de segundo grado. Por ejemplo, solucionar $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Factorizando de la misma manera que en la página 21 tenemos:

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)\,(x-4) = 0 \tag{23}$$

Para que la ecuación (23) se cumpla, tenemos dos opciones:

$$(x-3) = 0 \tag{24}$$

$$(x-4) = 0 \tag{25}$$

ya que $0\,(x-4) = 0$ o $(x-3)\,0 = 0$ por lo que, al solucionar las ecuaciones (24) y (25), obtenemos las dos soluciones de la ecuación (23). Esto es:

$$\begin{aligned} x_1 - 3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 - 4 &= 0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{aligned}$$

Sin embargo, en algunas ocasiones no es posible factorizar, sobre todo en ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

4.5.1. La solución general

Si tenemos ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos aplicar la factorización completando el trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción (ver página 21):

1. Se multiplica ambos miembros de la ecuación por $4a$:

$$\begin{aligned} 4a\left(ax^2 + bx + c\right) &= 4a\,(0) \Rightarrow \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

2. En la ecuación (26), vemos en el segundo término que nos falta el término b (el primer término ya tiene raíz cuadrada exacta), por lo que sumamos y restamos al primer miembro b^2:

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac\underline{+b^2 - b^2} &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 &= b^2 \end{aligned} \tag{27}$$

3. Para que tengamos un trinomio cuadrado perfecto, en el primer miembro de la ecuación (27) nos sobra $4ac$ que pasamos al segundo miembro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

4. En el primer miembro, la raíz cuadrada del primer término es $2ax$, la del tercer término es b, el signo del segundo término es positivo y es $2\,(2ax)\,(b) = 4abx$, entonces:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

5. Como $(a)^2 = (-a)^2 = a^2$, entonces, sacando raíz cuadrada:

$$2ax_{1,2} + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

   donde $x_{1,2}$ indica que x tendrá dos valores; uno usando el signo $+$ y otro calculando con el signo $-$ del radical.

6. Despejando x, tenemos:

$$\begin{aligned} 2ax_{1,2} + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax_{1,2} &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \tag{28}$$

A la ecuación (28) se le llama *Solución general para las ecuaciones de segundo grado.*

Por ejemplo: Hallar la solución de $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \\
x_1 &= \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\
x_2 &= \frac{7-5}{6} = \frac{6}{6} = 1
\end{aligned}$$

Y las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$.

La presencia de un radical que depende de los valores de los coeficientes de la ecuación de segundo grado y que haya entre los coeficientes un signo negativo, provoca tres posibles casos:

$b^2 - 4ac > 0$ Esto implica que tendremos dos raíces[8] reales y diferentes (como el caso del ejemplo)

$b^2 - 4ac = 0$ En este caso, tenemos un trinomio cuadrado perfecto y las raíces son reales e iguales.

$b^2 - 4ac < 0$ Este es el caso más problemático, pues tenemos dos raíces complejas conjugadas[9].

En este curso, veremos solamente veremos problemas del primero y del segundo tipo.

Referencias

[1] Anfossi, Agustin; *"Curso de Algebra"*; cuarta edición, Ed. Progreso, México, 1951.

[2] Baldor, Aurelio; *"Algebra"*; Ed. Publicaciones Cultural, México, 1985.

[3] *"Primer curso de matemáticas"*; Un libro viejo y despastado que desgraciadamente carece de las primeras 38 páginas (calculo que por allá de 1950 o anterior).

[4] Swokowsky, Earl. W.; *"Algebra y trigonometría con geometría analítica"*; 2^aedición; Ed. Iberoamérica, México, 1988.

[8] Recordemos que las raíces del polinomio, son las soluciones de la ecuación.

[9] En el campo de los números complejos aparece el número complejo (o imaginario) definido por $i^2 = -1$. Un número complejo, en general, es de la forma $z = a + ib$, en donde a es la parte real y b es la parte imaginaria. Dos números complejos conjugados son aquellos cuya parte imaginaria es de signo contrario, por ejemplo, para el número complejo $z = a + ib$, su conjugado es: $z^* = a - ib$