ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRES COMO REQUISITO DE UNA BUENA EXPERIEMNTACION

INTRODUCCION:

La experimentación tiene una definición muy amplia: por experimentación entendemos el proceso completo de identificar una porción del mundo que nos rodea , obtener información de ella e interpretarla. Esta definición abarca una variedad muy grande de actividades del ser humano: desde un biólogo, hasta un industrial que desea hacer buen mercadeo de su producto.

Un curso de laboratorio en física debe proporcionar los elementos básicos para aprender a diseñar buenos experimentos. Para lograr este objetivo es necesario asumir con una muy buena actitud cada práctica de laboratorio que abordemos.

He aquí la justificación para apoyarnos en un curso de laboratorio de física para enseñar experimentación. Los sistemas que incluye son lo bastantes sencillos para que estén cerca de ser comprensibles, y la práctica con ellos nos preparará para proseguir más adelante con nuestro trabajo profesional enfrentándonos a sistemas de pronto más complejos.

MEDICIONES E INCERTIDUMBRES:

DEFINICIONES:

Medición: Es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior. Las mediciones generalmente involucran la utilización de un instrumento como un medio físico para determinar una cantidad o variable.

El trabajo en mediciones emplea una serie de términos los cuales debemos definir.

Instrumento: un dispositivo empleado para determinar el valor o magnitud de una cantidad o variable.

Exactitud: la cercanía con la cual la lectura de un instrumento se aproxima al valor “verdadero” de la variable medida.

Precisión: una medida de la repetibilidad de las mediciones; esto es, dado un valor fijo de una variable , la precisión es una medida del grado con el cual mediciones sucesivas difieren una de otra.

Sensibilidad: la relación de la señal de salida o respuesta del instrumento al cambio de la entrada o variable medida.

Resolución: el cambio más pequeño en el valor medido para el cual el instrumento responderá.

Incertidumbre[1]: la desviación del valor “verdadero” al valor medido.

NATURALEZA BASICA DEL PROCESO DE MEDICION

[1] Muchas veces la incertidumbre en una medida es denominada como el error en la medida. Este término no es aconsejable utilizarlo , pues nos puede llevar equivocadamente a pensar que existe una medida exacta. Esto de entrada por el principio físico de la incertidumbre mecánico - cuántica no es posible.

Empecemos discutiendo en el nivel más básico. Supongamos que le damos a alguien un cuaderno para que le mida la longitud, y su respuesta es : la longitud del cuaderno es 29,5 cm. Pero ésta respuesta nos debe hacer pensar;... en realidad se nos pide que creamos que la longitud del cuaderno es de exactamente 29,5000000....? ***Claro que no!*** es claro que esa afirmación está fuera de los límites de la credibilidad. Entonces , cómo debemos interpretar el resultado? Una reflexión acerca del asunto nos hace concluir que , lejos de determinar el valor "correcto" o "exacto", lo único que podemos hacer es acercarnos al borde del cuaderno sobre la escala , diciéndonos conforme avanzamos : "Puedo asegurar que el resultado es menos de 30 cm ? , menos de 29,9 cm ? menos de 29,8 cm? " La respuesta a cada una de estas preguntas será indudablemente "Sí". Pero conforme avancemos sobre la escala , llegaremos a un punto en el cual ya no podremos dar con confianza la misma respuesta . En ese punto debemos detenernos, y de ese modo identificamos un extremo del intervalo que se convertirá en nuestro valor medido. De la misma manera podríamos acercarnos al borde del cuaderno por abajo , preguntándonos a cada paso: "...estoy seguro de que el resultado es mayor de 29,0 cm ? 29,1 cm? " y así sucesivamente . Una vez más debemos de llegar a un valor en el cual nos tendremos que detener, porque ya no podremos decir con seguridad que el resultado es mayor. Mediante la combinación de esos dos procesos identificamos un intervalo sobre la escala. Ese es el intervalo más pequeño que, hasta donde podemos estar seguros , contiene el valor deseado; sin embargo , no sabemos en que punto del intervalo está ese valor.

Lo que de debemos concluir del ejemplo es lo siguiente: cuando hagamos mediciones e informemos de sus resultados debemos tener siempre en cuenta que las medidas no son simples números exactos, sino que consisten en intervalos , dentro de los cuales tenemos confianza de que se encuentra el valor esperado. Este es un punto clave y fundamental .
No existen reglas para determinar el tamaño del intervalo, porque dependerá de muchos factores del proceso de medición. El tipo de medición, la figura de la escala, nuestra agudeza visual, las condiciones de iluminación, todas tomarán parte en determinar la anchura del intervalo de medición. El ancho, por lo tanto, debe determinarse explícitamente cada vez que se haga una medición. Por ejemplo, es un error común creer que , cuando se hace una medición usando una escala graduada , "el error de lectura" es automáticamente la mitad de la división de la escala más pequeña. Esta es una simplificación excesiva y errónea de la situación. Una escala con divisiones muy finas que se use para medir un objeto con bordes mal definidos puede dar un intervalo de medición más grande que varias de las divisiones más pequeñas ; por otra parte , un objeto con bordes bien definidos y con buenas condiciones visuales puede permitir la identificación de un intervalo de medición mucho menor que la división más pequeña de la escala. Cada situación debe evaluarse en forma individual.

INCERTIDUMBRE:

Como venimos diciendo, toda medición por su propia naturaleza lleva asociada consigo un intervalo de incertidumbre. De esta forma el resultado de la medición se debe enunciar como sigue:

$$\boxed{medida \pm incertidumbre}$$

No hay unificación de criterios para determinar dicho intervalo. A continuación citamos mediante algunos ejemplos criterios dados por diferentes autores para tal efecto:

- *Criterio 1*: Supongamos que deseamos medir la longitud de un lápiz usando una regla cuya mínima división es 1 mm y obtenemos como resultado 9,8 cm . Aquí observamos que en el resultado de la medición no aparecen las décimas de mm debido a que la regla no las resuelve. Se dice entonces que la medida es incierta en 1 mm y se escribirá:

$$(9{,}8 \pm 0{,}1)cm$$

Sí la medida realizada con un calibrador cuya mínima división está en las décimas de mm hubiera sido 9,84 cm , debemos escribir:

$$(9{,}84 \pm 0.01)cm$$

- *Criterio 2*: Respecto a la misma situación otros autores preferirán tomar como intervalo de incertidumbre a la mitad de la mínima división del instrumento de medida, y sus resultados obtenidos con la regla y con el calibrador , los habrían reportado respectivamente así:

$$(9{,}80 \pm 0{,}05)cm \text{ y } (9{,}840 \pm 0{,}005)cm$$

- *Criterio 3*: Otros autores preferirían que un grupo de personas hiciera la medida permitiéndole a cada una "estimar" la porción de segmento entre dos líneas de la mínima división ; es decir , se les permite dar una cifra dudosa . Así por ejemplo en el caso de la medida de la longitud del lápiz anterior utilizando la regla , diez personas podrían haber obtenido los siguientes resultados en cm:

$$9{,}82 \quad 9{,}83 \quad 9{,}82 \quad 9{,}84 \quad 9{,}85 \quad 9{,}83 \quad 9{,}84 \quad 9{,}85 \quad 9{,}84 \quad 9{,}82$$

Cómo se debería reportar el resultado de ésta medición?

El promedio de la longitud realizado con una calculadora será 9,834 cm. Podremos entonces decir que la longitud del lápiz es ésta? A primera vista parece correcto, pero si pensamos por un momento en la situación nos daremos cuenta de que hay algo que no está bien. Cuando cada persona medía estaba estimando centésimos de cm , por tanto el promedio no puede ser mejor que las mediciones hasta el punto de que ahora podamos dar un valor con milésimas de cm . Es decir el resultado de la medida deberá aparecer como 9,83 cm . Nos faltaría dar el intervalo de incertidumbre. Para ello lo mejor es calcular el valor absoluto de las desviaciones de cada medida respecto al valor medio y obtener de estos el valor medio (conocido con el nombre de *desviación estandart*), Si ustedes lo hacen obtendrán que el resultado es 0,01 por lo que el reporte será:

$$(9{,}83 \pm 0{,}01)cm$$

El resultado será más confiable entre más mediciones se hagan.
Esta última opción es realmente muy atractiva pues nos dá en algunas situaciones resultados con mayor precisión (recordemos lo que se argumentó en el parágrafo anterior). De todos modos sí se opta por él , se debe ser *muy cuidadoso* al hacer las "estimaciones".Tiene la desventaja que para una práctica de laboratorio de un curso de física general solo disponemos del tiempo necesario para hacer pocas medidas, pero aún así, en la mayor parte de las situaciones se puede lograr disminuir la incertidumbre.

Nota: En los aparatos de medición de marcas respetables, se incluye dentro de la información la "apreciación" del instrumento y bien se podría tomar ésta como la incertidumbre en la medida.

De todas formas insistamos en que sólo el experimentador es el que más parámetros de decisión debe tener para juzgar que opción ha de tomar para calcular su incertidumbre en la medida. Esto depende mucho de cada situación en particular.

En la próxima sección citaremos otro tipo de incertidumbre que puede entrar a jugar un papel importante en la medición. Se trata de mediciones en las cuales influye el "azar". Incluso en una medición determinada pueden estar incluidas las dos incertidumbres (la de la limitación misma del instrumento de medida y la del azar).

INCERTIDUMBRE ESTADISTICA

En la sección anterior nos ocupamos de las mediciones en las cuales la incertidumbre podía estimarse usando un *criterio personal*. Mas sin embargo a veces , la medición reiterada conduce a resultados claramente diferentes y el tratamiento de los datos debe ser obligatoriamente estadístico.

Por ejemplo , cuando discutimos el caso de la medición de longitud del lápiz , bien hubiéramos podido optar para obtener la incertidumbre por uno de los criterios que nada tenían que ver con la estadística (criterios 1 y 2), u optar por el criterio estadístico (criterio 3) . Pero, por ejemplo, si usamos un contador o registrador Geiger para medir la actividad de una fuente radiactiva , y decidimos obtener , para una configuración dada , la cantidad de partículas en un intervalo de 10 segundos , encontraríamos que los resultados obtenidos al contar varios intervalos sucesivos de 10 segundos no son iguales. Podemos encontrarnos con la misma situación en mediciones que impliquen un discernimiento visual. Si por ejemplo, queremos encontrar la imagen formada por una lente delgada , no seremos capaces de determinar la posición de la imagen con suficiente exactitud como para obtener , en forma repetida , la misma lectura que en un buen medidor de alta precisión . Ya sea que la fluctuación sea inherente al sistema sujeto a investigación (como la fuente radiactiva, donde la fluctuación surge de la naturaleza esencial de la desintegración radiactiva espontánea) , o que provenga de nuestras dificultades para efectuar la medición , debemos aprender a hacer afirmaciones sensatas sobre mediciones que muestren variaciones de este tipo.

Media y desviación estándar:

Cuando hay fluctuaciones en la medida como las descritas en el párrafo anterior, en general uno supone que el tratamiento estadístico obedece la denominada “distribución Gaussiana” o “normal”. Esta distribución se utiliza para interpretar muchos tipos de mediciones físicas, en parte debido a que las circunstancias mecánicas de muchas de éstas guardan estrecha correspondencia con los fundamentos teóricos de dicha distribución, y en parte porque la experiencia demuestra que la estadística Gaussiana si proporciona una descripción razonablemente exacta de los sucesos reales. Sólo para otro tipo común de mediciones físicas es más apropiada otra distribución : al observar fenómenos como la desintegración radiactiva debemos emplear la distribución conocida como “distribución de Poisson” de la cual no nos ocuparemos aquí. Pero aún en casos como éste, la diferencia con la estadística de Gauss resulta significativa sólo para muy bajos niveles de ocurrencia.

Citemos un ejemplo para ilustrar ésta distribución: supongamos que se hizo oscilar un péndulo particular y se midió el tiempo de una sola oscilación cincuenta veces. , y se obtuvieron los resultados de la siguiente tabla:

TABLA B.1

PERIODO DEL PENDULO MEDIDO EN SEGUNDOS				
3,12	3,18	3,25	3,32	3,32
3,62	3,33	3,30	3,42	3,27
3,33	3,28	3,15	3,12	3,20
3,17	3,18	3,20	3,18	2,98
3,58	3,52	3,35	3,33	3,38
3,27	3,02	3,00	3,32	3,08
3,00	3,35	3,63	3,15	3,38
2,97	3,15	3,27	2,90	3,27
3,18	3,18	3,28	3,28	3,20
3,17	3,45	3,18	3,27	3,37

Para ilustrar gráficamente este proceso estadístico, se utiliza el denominado *“histograma”* , en el cual se representa la distribución de frecuencias de las lecturas . La curva resultante se asemeja a una campana, la cual se denomina “campana de Gauss” . Ella es simétrica respecto al valor medio de la medición. Esto, no lo observamos claramente en este experimento (ver figura 1). La razón de esto, es que la regularidad de los datos, y la simetría de la campana se logran , al ir aumentando sustancialmente el número de estos.

En general la Gaussiana tiene la forma de la figura 2.

FIGURA.1

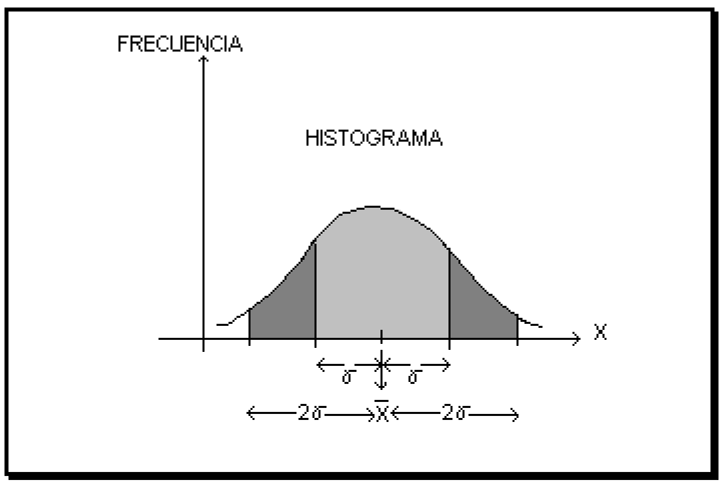

FIGURA 2

El parámetro σ de la figura 2 , es la denominada *desviación estándar* de la distribución. Una de las propiedades de la Gussiana, es que entre más se estrecha, más sube su pico y obviamente menor es la *desviación estándar*, es decir menor es la incertidumbre estadística. Además ella se acerca asintóticamente a la línea horizontal que representa el valor de las medidas.

El valor de la medida generalmente se reporta como sigue:

$$\bar{x} \pm s$$

Su interpretación es la siguiente: si efectuamos una sola medición con nuestro equipo, ésta tiene una probabilidad del 68% de estar incluida en el intervalo $\bar{x} \pm s$ (geométricamente el área bajo la campana de Gauss comprendida en ese intervalo, es el 68% del área total).

Si el resultado se reportara como $\bar{x} \pm 2s$ (como de hecho se podría hacer), se interpretaría diciendo que si efectuamos una medición con nuestro equipo , ésta tendría una probabilidad del 95% de caer en el intervalo $\bar{x} \pm 2s$ (el área de la curva de la Gaussiana comprendida en este intervalo es el 95% del área total).

La media de la distribución de datos y su desviación estándar se calculan así:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum_{1=1}^{N} x_i}{N} \\ s &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{N-1}} \end{aligned}} \qquad [1]$$

Obviamente la confiabilidad de los resultados aumenta con el número de mediciones. No es práctico hacer un análisis estadístico para menos de 10 mediciones , sobre todo si observamos grandes desviaciones estándar.

Para el caso expuesto del la medición del período del péndulo, cuyas medidas están reportadas en la tabla 1 , el resultado se debe escribir como sigue:

$$3{,}25 \pm 0{,}12 \ seg \ \text{ o } \ 3{,}25 \pm 4\% \ seg$$

aquí, 3,25 s es el valor medio del período y 0,12 s es la desviación estándar de la medida , o sea la incertidumbre estadística

INCERTIDUMBRE ABSOLUTA Y RELATIVA.

Cualquiera que sea el medio por el que hayamos hecho una medición, y cualquiera que haya sido el tipo de incertidumbre , el resultado final deberá ser un intervalo que representa , hasta donde nuestra capacidad lo garantice , los límites dentro de los que se encuentra el valor deseado. Por ejemplo en el caso de la longitud del lápiz usando la regla , sólo podemos afirmar que ésta se encuentra entre 9,82 cm y 9,84 cm. Como las cifras 0,01 cm representan la magnitud o intervalo en que la lectura 9,83 cm es incierta , a menudo se le llama la " incertidumbre absoluta" de la medida , y usaremos con consistencia esta terminología. Además , otros aspectos pronto se vuelven importantes . Cuán significativa es una incertidumbre de $\pm 0{,}01$ cm? Cuando medimos la longitud de un lápiz , es significativa hasta cierto punto. Si estamos midiendo la distancia entre dos ciudades , esa incertidumbre es probable que sea completamente insignificante . Por otra parte , si estamos midiendo el tamaño de una bacteria microscópica , una incertidumbre así haría que la medición careciera de sentido. Por esta razón , con frecuencia es deseable comparar la magnitud de la incertidumbre con el va;lor de la medición misma; haciéndolo así se puede evaluar en forma realista cuán significativa es ésta. Se define la razón :

$$\boxed{incertidumbre \ \ relativa = \frac{incertidumbre \ \ absoluta}{valor \ \ medido}} \qquad [2]$$

En el caso de la longitud del lápiz medido con la regla será:

$$incertidumbre \ \ relativa = \pm\frac{0{,}01}{9{,}83} = \pm 0{,}001$$

$$incertidumbre \ \ relativa = 0{,}1\%$$

Esa cantidad nos da un sentido mucho mejor de la calidad de la lectura , y a menudo la llamamos la " precisión" de la medida. Observen que la incertidumbre relativa es un número adimensional.

Para el caso de la medida del periodo del péndulo el resultado de reportará como:

$$3{,}25 \pm 0{,}12 \ seg \ \text{ o } \ 3{,}25 \pm 4\% \ seg$$

aquí, 3,25 s es el valor medio del período y 0,12 s es la desviación estándar de la medida o la incertidumbre estadística absoluta. La incertidumbre relativa será del 4%.

ERROR SISTEMATICO

El tipo de incertidumbre que hemos considerado surge de una insuficiencia que ocurre naturalmente en el proceso de medición . Hay un tipo de error diferente que puede aparecer cuando algo afecta todas las lecturas de una serie en forma igual o consistente . Por ejemplo, un voltímetro o un tornillo micrométrico pueden tener un mal ajuste del cero, una regla de madera puede haberse encogido, una persona puede apretar sistemáticamente el botón de un cronómetro $1/10$ después del suceso, y así por el estilo. Esos errores se llaman " errores sistemáticos" , de los cuales una subclase es la de los " errores de calibración " .

" ERRORES" APRECIATIVOS[2]:

Este tipo de errores se ilustra con el siguiente ejemplo: Supongamos que queremos obtener la posición de una imagen real de una vela dada por una lente convergente. Al ir moviendo la pantalla para lograr la localización de dicha imagen , observamos que no hay una posición fija para ello. Hay un intervalo de unos 4 cm que nos permite lograr esto. La lectura podría reportase leyendo la posición del punto medio de dicho intervalo y dando como incertidumbre la mitad de dicho intervalo, es decir 2 cm . Sí el intervalo en cuestión está entre los 14,5 cm y los 18,5 cm deberíamos reportar el siguiente resultado:

$$(16{,}5 \pm 2{,}0)\, cm$$

Otra forma de enfrentar ésta situación podría ser como se enfrentó la medida de la longitud del lápiz.

Como dijimos, el experimentador es el que debe hacer su propio juicio.

Caso especial:

En una determinada situación la medida de una magnitud puede presentar simultáneamente dos incertidumbres, una debida a la apreciación del aparato de medición y la otra debida a fluctuaciones estadísticas . Por ejemplo, la medida del tiempo utilizando un cronómetro que resuelve hasta las centésimas de segundo (0,01 s). En este caso los solos reflejos del experimentador para activar y desactivar el cronómetro va a introducir fluctuaciones que merecen un tratamiento estadístico. El experimentador deberá tomar como la incertidumbre, a la mayor de ellas. Para el experimento presente lo más lógico es que quedará como incertidumbre la estadística (la desviación estándar).

MEDICION INDIRECTA -INCERTIDUMBRES EN CANTIDADES CALCULADAS - *("propagación de incertidumbres")*

---

[2] Extraído de: Alzate L. Héctor ; Manual de Laboratorio -ONDAS- ; U de A; Medellín , 1991.

En las secciones anteriores nos hemos ocupado sólo del concepto de incertidumbre de una sola medida. Sin embargo , es raro que el proceso se termine con una sola medición. Generalmente el proceso de medición es *indirecto,* es decir , el resultado que deseamos es una combinación de dos o más cantidades medidas , o es por lo menos una función calculada a partir de una sola medida . Por ejemplo, supóngase que se quiere determinar el volumen de un cilindro midiendo su radio y su altura, o el volumen de una esfera midiendo su radio. Las incertidumbres ("errores") asociadas con las magnitudes medidas directamente se propagan al resultado de la medida final.

Para tratar ésta propagación de la incertidumbre debemos considerar dos casos: Cuando la incertidumbre no tiene un caracter estadístico y cuando lo tiene.

CASO I : *Propagación de la incertidumbre que no tiene carácter estadístico.*

Por los métodos del cálculo diferencial se puede demostrar que si la magnitud a medir es $y_{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$, es una función de varias variables , la incertidumbre absoluta δy en su medida , debida a las medidas de las magnitudes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ será:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \delta x_i \qquad [3]$$

donde los δx_i son las respectivas incertidumbres absolutas en los x_i .

Ejemplos:

(a) Por ejemplo, supongamos que deseamos medir el área A de un rectángulo a partir de las medidas directas de su largo l y de su ancho a . Según lo anterior la incertidumbre absoluta en la medida del área , δA, debido a las incertidumbres absolutas δl y δa en las medidas del largo y del ancho respectivamente será :

$$A = la$$
$$\delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial l} \right| \delta l + \left| \frac{\partial A}{\partial a} \right| \delta a$$
$$\delta A = a\delta l + l\delta a$$

La incertidumbre relativa en la medida del área será:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{a\delta l + l\delta a}{al} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta a}{a}$$

(b)Si deseamos medir el volumen de un cilindro realizando las medidas directas de su diámetro d y de su altura h , la incertidumbre absoluta en la medida del volumen será:

$$V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$$

$$\delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|\delta d + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\delta h$$

$$\delta V = \frac{\pi}{4}\left[2dh\delta d + d^2\delta h\right]$$

$$\delta V = \frac{\pi}{2}dh\delta d + \frac{\pi}{4}d^2\delta h$$

donde δd y δh son las incertidumbres absolutas en las medidas del diámetro y la altura respectivamente.

(c) Supongamos que necesitamos hallar el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son: l: largo; a: ancho; h: altura . Para ello se procede a tomar cinco medidas para cada una de estas dimensiones , con una regla graduada hasta milímetros. Los datos están consignados en la siguiente tabla:

TABLA 2

DIMENSION					
LARGO (cm)	9,23	9,25	9,22	9,30	9,18
ANCHO (cm)	4,32	4,38	4,35	4,35	4,34
ALTURA (cm)	6,54	6,50	6,48	6,52	6,46

Observe que nos hemos permitido tratar de “acertar” visualmente (siendo lo más cuidadosos posible) las décimas de milímetro que no las resuelve la regla (esto ya lo hemos justificado en los párrafos de atrás) . Otros autores preferirán no hacer esto , es decir, no permitirán colocar la cifra dudosa.

En nuestro caso reportaremos los siguientes resultados:

TABLA 3

DIMENSION	MEDIA	INCERTIDUMBRE	RESULTADO
LARGO (cm)	9,24	0,03	$9,24 \pm 0,03$
ANCHO (cm)	4,35	0,01	$4,35 \pm 0,01$
ALTURA (cm)	6,50	0,02	$6,50 \pm 0,02$

De esta forma la incertidumbre absoluta en la medida del volumen del paralelepípedo será:

$$V = lah$$

$$\delta V = ah\delta l + lh\delta a + la\delta h$$

es decir,

$$V = (9{,}24cm)(4{,}35cm)(6{,}50cm) = 261{,}26cm^3$$

$$\delta V = \left[(4{,}35)(6{,}50)(0{,}03) + (9{,}24)(6{,}50)(0{,}01) + (9{,}24)(4{,}35)(0.02)\right]cm^3$$

$$\delta V = \left[0{,}85 + 0{,}60 + 0{,}80\right]cm^3 = 2{,}25cm^3$$

y el error relativo será,

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl}{l} + \frac{da}{a} + \frac{dh}{h}$$

es decir,

$$V = (261{,}26 \pm 2{,}25)cm^3$$
$$V = 261{,}26cm^3 \pm 0{,}9\%$$

(c)Supongamos que para una lente delgada , deseamos calcular la distancia focal f haciendo medidas de la distancia objeto d_o y de la distancia imagen d_i .

Recordemos que la relación entre estas tres variables es:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

por lo que la incertidumbre absoluta en la medida de la distancia focal será:

$$df = f^2 \left[\frac{d_{d_o}}{{d_o}^2} + \frac{d_{d_i}}{{d_i}^2} \right]$$

debemos tener cuidado en tomar los valores absolutos[3].

(d) Supongamos que una magnitud z se puede expresar en función de otras dos como $z = x - y$, de tal forma que la incertidumbre relativa sería

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + dy}{x - y} .$$

Podemos ver que , cuando x e y son muy cercanas , $x - y$ será muy pequeña, la incertidumbre relativa puede adquirir valores muy grandes. Esto es, en el mejor caso , una situación insatisfactoria, y la precisión puede ser tan baja que anule el valor de la medición. Esa condición es en particular peligrosa , ya que puede pasar inadvertida. Es perfectamente obvio que nadie intentaría la longitud de un cuaderno midiendo la distancia de cada borde a un punto alejado a un kilómetro para luego restar las dos longitudes. Sin embargo, puede suceder que el resultado deseado se obtenga por sustracción de dos medidas realizadas por separado (en dos termómetros, dos relojes,...), y el carácter de la medición como diferencia puede no ser claro. En consecuencia , todas las mediciones que tengan que ver con diferencias deberán tratarse con el mayor cuidado. Es claro que la forma de evitar esa dificultad es medir la diferencia de manera directa, en vez de obtenerla por sustracción de dos cantidades medidas. Por ejemplo, si uno tiene un aparato en el que dos puntos están a potenciales respecto a tierra de $V_1 = 1500 voltios$ y $V_2 = 1510 voltios$ y la cantidad que se requiere es $V_2 - V_1$, sólo un voltímetro de alta calidad permitiría medir los valores de V_2 y V_1 con la exactitud requerida para lograr incluso un 10% de precisión en $V_2 - V_1$. Por otro lado , un voltímetro ordinario de 10 V , conectado entre los dos puntos para medir $V_2 - V_1$ directamente, daría de inmediato el resultado deseado, con un 2 o 3% de precisión.

---

[3] Esto equivale ha realizar nuestros cálculos para “el peor caso” de combinación de incertidumbres.

(d) A continuación damos las incertidumbres relativas para diferentes situaciones:

- $z = \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x} + \frac{dy}{2y}$
- $z = x^a y^b \Rightarrow \frac{dz}{z} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y}$

COMPENSACION DE INCERTIDUMBRES:

Puede darse una situación especial cuando se trata de la medida de una magnitud en forma indirecta, a través de la medida de varias magnitudes.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación óptica que relaciona el ángulo de desviación mínima d_m en un prisma , el índice de refracción n y el ángulo A del prisma:

$$n = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(A + d_m\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}$$

Si A y d_m son variables medidas con incertidumbres dA y dd_m , la cantidad n es el resultado requerido, con una incertidumbre dn .

En este caso no podemos aplicar el método de propagación de errores descrito en la sección anterior, debido a que las variables A y $\left(A + d_m\right)$
no son independientes. En ésta situación la incertidumbre asociada al numerador puede compensar a la incertidumbre asociada con el denominador , dando como resultado que la incertidumbre en n no sea tan grande. Para evitar esta dificultad , lo mejor sería reducir la ecuación a una forma en la que todas las variables sean independientes , o bien regresar a los principios básicos (es decir, a los principios físicos que llevaron a tal expresión) y de esta forma ya poder hacer el análisis anterior.

Los casos que tienen que ver con incertidumbres que se compensan deben de vigilarse con cuidado, ya que pueden , si se tratan en forma incorrecta , dar lugar a errores en los cálculos de incertidumbre que son difíciles de detectar.

Ejercicios para el lector:

- Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de la gravedad , usando la expresión $T = 2p\sqrt{l/g}$. El período medido fue de $1{,}24 \pm 0{,}02\,seg$ y la longitud de $0{,}381 \pm 0{,}002\,m$. Cuál es valor resultante de la gravedad con su incertidumbre absoluta y relativa?

  Rp: $9{,}77 \pm 0{,}04\,ms^{-2};\quad 0{,}4\%$

- La distancia focal, f , de una lente delgada se va a medir usando la relación $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$, en donde:

$$d_o = distancia\, objeto = 0{,}154 \pm 0{,}002m$$
$$d_i - distancia\, imagen = 0{,}382 \pm 0{,}002m$$

Cuál es el valor calculado de la distancia focal, su incertidumbre absoluta y su incertidumbre relativa?.
Rp: 0,1100 m ; 0,0012 m ; 1,08%

- Una rejilla de difracción se usa para medir la longitud de onda de luz , usando la ecuación $d\,\mathrm{sen}q = l$. El valor medido de θ es de $13^0 \;\; 34' \pm 2'$. Suponiendo que el valor de d es $1420x10^{-9}m$ y que se puede ignorar su incertidumbre, cuál es la incertidumbre absoluta y la relativa en el valor de λ?

  Rp: 0,8 nm ; 0,24%

***CASO II**: Propagación de la incertidumbre con caáacter estadístico (osea de la desviación estándar).*

Supongamos que deseamos medir una magnitud física a través de la medida de otras. En el caso de que la recolección de datos para obtener las respectivas medidas justifique un análisis estadístico, es decir que las desviaciones estándar sean confiables , la mejor opción para calcular la desviación estándar de la medida buscada se debe hacer como se indica a continuación.

Sea $z_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ y $s_1, s_2, \ldots, s_n$ las respectivas desviaciones estándar en las medidas de las magnitudes $x_1, x_2, .., x_n$, la desviación estándar s_z para la medida de la magnitud z será:

$$\boxed{s_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2 s_i^{\,2}}} \qquad [.4]$$

Ejemplos:

- $z = x \pm y \Rightarrow s_z = \sqrt{s_x^{\,2} + s_y^{\,2}}$
- $z = xy \Rightarrow s_z = \sqrt{y^2 s_x^{\,2} + x^2 s_y^{\,2}}$
- $z = x^a y^b \Rightarrow \dfrac{s_z}{z} = \sqrt{\left(\dfrac{a s_x}{x} \right)^2 + \left(\dfrac{b s_y}{y} \right)^2}$

COMBINACION DE DIFERENTES TIPOS DE INCERTIDUMBRES.

Para desgracia de la elegancia matemática en los cálculos , a menudo requerimos definir la incertidumbre en un resultado que incluye parámetros con diferentes tipos de incertidumbre. Podemos , por ejemplo, necesitar la incertidumbre en

$$z = f\left(x, y\right)$$

donde x es una cantidad sin carácter estadístico y a la cual se le ha asignado una incertidumbre igual a $\pm\delta x$ dentro de los cuales estamos "casi seguros" de que se encuentra su valor real, en tanto que y es una cantidad cuya incertidumbre es de naturaleza estadística , es decir se trata de una desviación estándar σ_y . Y necesitamos determinar un índice de incertidumbre para z . Nuestra primera dificultad es definir si quiera la incertidumbre en z . Estamos tratando de combinar dos parámetros que tienen, en efecto, curvas de distribución completamente diferentes. Una es una función normal de Gauss; la otra es un rectángulo, limitado por los valores $x_0 + \delta x$ y $x_0 - \delta x$, y plano en la parte superior pues el valor de x puede, por igual, darse en cualquier punto dentro del intervalo $x_0 \pm \delta x$. Hacer un análisis matemático riguroso al respecto es demasiado complejo; mas sin embargo podemos optar por una buena aproximación.
En el cálculo de z utilizamos la media de la muestra , $\bar{y}$, para el valor de y , y tomamos como su incertidumbre la desviación estándar σ_y , lo cual implica que si se realiza una medida con nuestros aparatos, el resultado obtenido para y tendrá el 68% (2/3) de la probabilidad de encontrarse en el intervalo $\bar{y} \pm \sigma_y$. Como la distribución de x es rectangular , al realizar una medida con nuestros aparatos, tendremos una probabilidad casi del 100% (3/3) , de que el resultado para x este contenido en el intervalo $x_0 \pm \delta x$. Esas incertidumbres no son compatibles (nuevamente, repetimos, esto es debido al efecto de que las distribuciones estadísticamente no son las mismas).

Para lograr la compatibilidad , procedemos así: Como la distribución de probabilidad de x es rectangular, 2/3 del área bajo la curva de distribución están encerrados por límites separados por una distancia igual a 2/3 del rango total de posibilidades , esto es, $\frac{2}{3}$ de $2\delta x$ .La amplitud total del espacio con probabilidad de 2/3 es, por tanto, $\frac{4}{3}$ de δx , y los límites de incertidumbre son de $\pm\frac{2}{3}\,\delta x$ (ver figura 3)

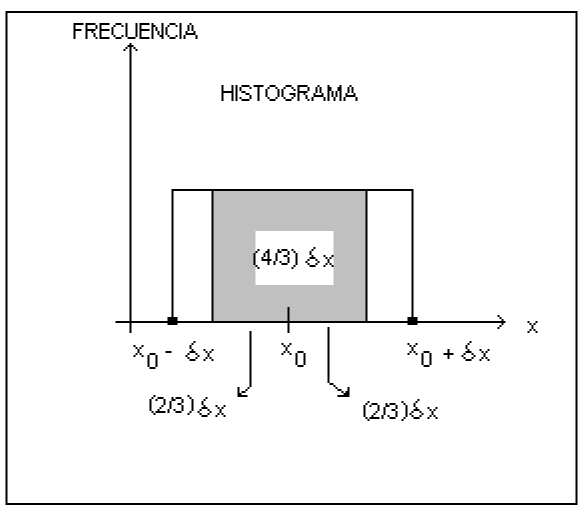

FIGURA 3

La cantidad $\frac{2}{3}\delta x$ es , por tanto , compatible con σ_y , puesto que ambos se refieren a una probabilidad 2/3. Puede usarse ahora la ecuación [B.4] , introduciendo a $\frac{2}{3}\delta x$ para el valor de la desviación estándar de la media de x . Esto dará un valor de incertidumbre para z que puede interpretarse de acuerdo con la regla de los 2/3 (es decir, cualquier medición de la variable z , tendrá una probabilidad de 2/3 de estar comprendida en el intervalo $z \pm s_z$.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Una vez que se haya obtenido la incertidumbre total del resultado final, se puede considerar el problema del número de cifras significativas que deben conservarse en el resultado.

No hay una respuesta única a la cuestión de las cifras significativas , pero, en general, no se deberían dejar cifras después de la primera cifra incierta. Por ejemplo: $5{,}4387 \pm 0{,}2$ debe señalarse como $5{,}4 \pm 0{,}2$, porque si el 4 es incierto, los 387 lo son mucho más . Sin embargo, si se conoce la incertidumbre con mayor precisión , puede estar justificado retener una cifra más . De este modo, si fuera el caso que la incertidumbre anterior es de 0,15, sería válido reportar la respuesta como $5{,}44 \pm 0{,}15$.

Las cifras significativas se cuentan de izquierda a derecha , a partir del primer dígito diferente de cero y hasta el dígito dudoso.
Por ejemplo, las siguiente cantidades tienen cuatro cifras significativas: 3,893 ; 0,00003245 ; $90.43x10^{-5}$
.
A continuación se dan unas reglas que serán de utilidad para trabajar con datos experimentales siendo conveniente tenerlas presentes :

Regla 1:

Los resultados experimentales se expresan con sólo una cifra dudosa , e indicando con $\pm$ la incertidumbre en la medida.

Regla 2:

Las cifras significativas se cuentan de izquierda a derecha , a partir del primer dígito diferente de cero y hasta el dígito dudoso.

***Regla 3*:**

Al sumar o restar dos números decimales , el número de cifras decimales del resultado es igual al de la cantidad con el menor número de ellas .

Caso especial:

Un caso de especial interés es el de la resta. Citemos el siguiente ejemplo:

$$30{,}3475 - 30{,}3472 = 0{,}0003$$

observemos que cada una de las cantidades tiene seis cifras significativas y el resultado posee tan solo una. Al restar se han perdido cifras significativas. Esto es importante tenerlo en cuenta cuando se trabaja con calculadoras o computadores en donde haya cifras que se sumen y se resten. Es conveniente realizar primero las sumas y luego las restas para perder el menor número de cifras significativas posible.

Regla 4

Al multiplicar o dividir dos números , el número de cifras significativas del resultado es igual al del factor con menos cifras.

BIBLIOGRAFIA

- D.C. BAIRD . EXPERIMENTACION -Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos-Prentice Hall, Segunda Edición, 1991.

- FINN Y ALONSO, FISICA -VOLUMEN I- Fondo Educativo Interamericano, 1970

- ALZATE LOPEZ HECTOR, MANUAL DE LABORATORIO-ONDAS- Universidad de Antioquia, Medellín 1991.

- LOPEZ FRANCO LUIS FERNANDO, TRATAMIENTO DE ERRORES-Universidad Nacional, Medellín , 1991.

- ARISTIZABAL RAMIREZ DIEGO L., MANUAL DE LABORATORIO PARA BIOFISICA, Universidad Nacional, Medellín, 1991.

- TOBON R,. RAMIRO, FISICA: PRINCIPIOS Y APLICACIONES, MULTITALLER DE MATERIALES DIDACTICOS, Universidad del Valle, Cali, 1984.