

## TRIGONOMETRÍA

### SABIAS QUE...

Las nociones elementales de la Trigonometría ya eran utilizadas por Hiparco, nacido en Grecia quien viviera entre los años 161 y 127 A.C y considerado el astrónomo más grande de la antigüedad.

Con el paso de los siglos se ha hecho costumbre relacionar la Trigonometría con problemas relativos a la medida de los lados y ángulos de un triángulo, aunque su origen aparece en las cuerdas subtendidas por los ángulos centrales de un círculo.

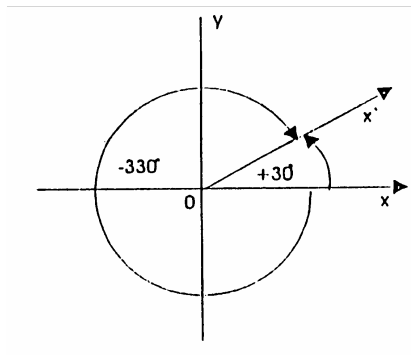
En los últimos 100 años (aproximadamente) una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría a la Matemática es el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, relacionado estrechamente con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas.

### 9\*1 ANGULOS Y ARCOS ORIENTADOS

Si bien, conviene recurrir a la bibliografía para revisar los conceptos de ángulos y relación de congruencia; te ofrecemos una síntesis, acompañada de actividades en referencia a los temas mencionados.

Sea un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen  $o$ , al considerar las rotaciones del semieje  $\overrightarrow{ox}$  con centro  $o$ ; surgen dos posibilidades:

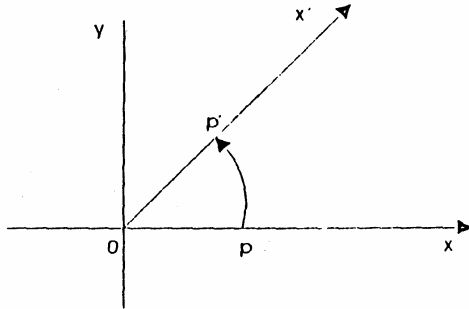
- **SENTIDO POSITIVO**  
(contrario al de las agujas del reloj); llamado también **sentido antihorario**
- **SENTIDO NEGATIVO**  
(opuesto al anterior); llamado **sentido horario**



Obsérvese que en ambos casos coinciden el lado inicial y terminal del ángulo de amplitud  $+30^\circ$  con el de  $-330^\circ$ .

Al igual que con los ángulos, el sentidos de rotación orienta a los **arcos** (generados por cada punto de  $\overrightarrow{ox}$  excepto el origen)

Si P es un punto cualquiera de  $\overrightarrow{ox}$  (distinto de o) la razón entre la longitud del arco  $\widehat{PP'}$  y la del segmento  $\overline{OP}$  es siempre la misma, para toda posición de P.



Así se origina el **sistema circular o radial** de medición de ángulos, en el que se adjudica a cada ángulo la medida del correspondiente arco de circunferencia **con respecto al radio** de la misma.

!!!

**La medida de un ángulo es el número real que se obtiene de la razón entre la longitud del arco correspondiente y la longitud del radio.**

- El arco de **un radian** (unidad del sistema circular), es el arco cuya longitud coincide con el radio de la circunferencia. Para el caso particular en que el arco es una circunferencia, la razón entre su longitud y la de su radio (medidas con respecto a la misma unidad), es el número irracional:  $2\pi$ , ó sea:

$$\frac{\text{long. de circunferencia}}{\text{radio}} = \frac{2\pi \cdot \text{radio}}{\text{radio}}$$

con lo que la longitud de la circunferencia, expresada en radianes es:  $2\pi$

- Como el ángulo de 1 giro en sistema sexagesimal mide  $360^\circ$  y en sistema radial mide  $2\pi$ ; es evidente la relación existente entre ambos sistemas que permitirá el pasaje de uno a otro y viceversa.

#### EJEMPLOS:

- 1) Expresa en sistema circular  $\hat{\alpha} = 103^\circ 15'$

$$360^\circ \text{-----} 2\pi \quad \rightarrow \quad 360^\circ \text{-----} 2\pi$$

$$103^{\circ}15' \frac{\quad}{2\pi \cdot 103^{\circ},25} x \qquad 103^{\circ},25' \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{\quad}{360^{\circ}}$$

$$x = 1,80 |$$

2) Expresa en sistema sexagesimal

$$2\pi \frac{\quad}{\quad} 360^{\circ}$$

$$\frac{3\pi}{4} \frac{\quad}{\quad} 360^{\circ} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} = 135^{\circ} \rightarrow \hat{\beta} = 135^{\circ}$$

3) Expresa en sistema sexagesimal

$$2\pi \frac{\quad}{\quad} 360^{\circ}$$

$$5,3 \frac{\quad}{\quad} \frac{360^{\circ} \cdot 5,3}{2\pi} = 303,66^{\circ}$$

Pero

$$1^{\circ} \frac{\quad}{\quad} 60'$$

$$0,66^{\circ} \frac{\quad}{\quad} \frac{60' \cdot 0,66^{\circ}}{1^{\circ}} = 40,02'$$

Y

$$1' \frac{\quad}{\quad} 60''$$

$$0,02' \frac{\quad}{\quad} \frac{60'' \cdot 0,02'}{1'} = 1,2''$$

**Finalmente :**  $\delta = 303^{\circ} 40' 1,2''$

---

**USANDO CALCULADORA:**

1) Dado el ángulo  $\alpha = 42^{\circ} 15' 30''$  en sistema sexagesimal, obtener su expresión en grados sexagesimales.

**secuencia:** 42 15  $\overleftarrow{0''}$  30  $\overleftarrow{0''}$  y en pantalla se observa : 42,258 $\bar{3}$

**2) Dada la expresión decimal en grados sexagesimales del ángulo anterior, obtener la expresión en grados, minutos y segundos sexagesimales**

**secuencia:**  $42^\circ \text{ " } 2583 \text{ INV } \overline{0} \text{ " } : 42^\circ 15' 30''$

Existen calculadoras científicas que te permiten pasar de un sistema a otro, mediante unas simples secuencias.

3) Pasar  $\hat{\alpha} = 104^\circ 18'$  a radianes:

**secuencia:** MODE RAD EXE 104  $\overline{0} \text{ "}$  SHIFT MODE DEG EXE

y se obtiene : 1,82037841

4) Pasar 1,82037841 radianes a sistema sexagesimal.

**secuencia:** MODE DEG EXE 1 " 82037841

y se obtiene: 104.3 y mediante lo visto en 2), llegamos al ángulo  $\hat{\alpha} = 104^\circ 18'$

## 9\*2 RELACION DE CONGRUENCIA

En el conjunto de los ángulos orientados y medidos en sistema sexagesimal, si se define la relación

$R : \hat{\alpha} R \hat{\beta} \leftrightarrow \hat{\alpha} - \hat{\beta} = k \cdot 360^\circ, \text{ con } k \in Z$ , que resulta ser reflexiva, simétrica y transitiva, es decir de equivalencia, se la denomina **congruencia**.

Simbólicamente  $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}$  (se lee  $\hat{\alpha}$  es congruente con  $\hat{\beta}$ ). Toda relación de equivalencia, en este caso la congruencia, lleva asociada una partición del conjunto en el cual está definida. Es decir:

$C_\alpha$ : **contiene todos los ángulos del conjunto considerado congruente con  $\alpha$**

**EJEMPLO:**  $C_{30} = \{30^\circ + K \cdot 360^\circ, K \in Z\}$  y es evidente que tiene infinitos elementos.

Además  $\hat{\alpha} = 30^\circ$  es el **representante** de la clase de congruencia.

Por lo tanto:

!!!

**Si  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ , la clase de equivalencia que él representa, se lo simboliza:**

$C_\alpha$ , o sea:

$$C_\alpha = \{\hat{\alpha} + K \cdot 360^\circ, K \in Z\}$$

Análogamente en el conjunto de los ángulos medidos en sistema circular, dos ángulos son congruentes si su diferencia es un múltiplo entero de  $2\pi$

$$\hat{\alpha} R \hat{\beta} \leftrightarrow \hat{\alpha} - \hat{\beta} = 2K\pi \quad , \quad \text{con } K \in \mathbb{Z}$$

***Ha llegado el momento de que observes si todos los conceptos  
revisados han sido fijados convenientemente***

**[1]** Expresa en sistema circular cada uno de los siguientes ángulos:

1.1)  $\hat{\alpha} = 60^\circ$

1.4)  $\hat{\delta} = 300^\circ 45'$

1.2)  $\hat{\beta} = 240^\circ$

1.5)  $\hat{\sigma} = 45^\circ 52' 10''$

1.3)  $\hat{\chi} = 150^\circ 15'$

1.6)  $\hat{\tau} = 120^\circ 15' 10''$

**[2]** Expresa en sistema sexagesimal:

2.1)  $\hat{\alpha} = 60^\circ$

2.4)  $\hat{\delta} = 1,5$

2.2)  $\hat{\beta} = 1$

2.5)  $\hat{\epsilon} = 4$

2.3)  $\hat{\chi} = \frac{5\pi}{2}$

2.6)  $\hat{\tau} = \frac{\pi}{10}$

**[3]** Califica de verdadero o falsa cada una de las siguientes proposiciones y justifica:

3.1)  $1560^\circ \in C_{120^\circ}$

3.4)  $-720^\circ \in C_{180^\circ}$

3.2)  $-2610^\circ \notin C_{270^\circ}$

3.5)  $48^\circ 15' \in C_{48^\circ 15'}$

3.3)  $440^\circ \in C_{260^\circ}$

3.6)  $-1309^\circ 55' \in C_{130^\circ 15'}$

**[4]** Califica de verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones y justifica:

4.1)  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{7\pi}{2}$  son congruentes

4.2)  $C_{\frac{\pi}{4}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k.\pi, k \in Z \right\}$

4.3)  $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in N$

4.4)  $\frac{108\pi}{4}$  y  $\frac{-15\pi}{2}$  pertenecen a  $C_{\frac{\pi}{2}}$

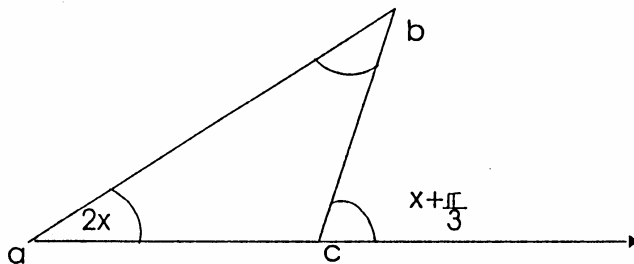
**[5]** Calcula la longitud de un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central de  $72^\circ$  y cuyo radio mide 8cm.

**[6]** Calcula con  $\epsilon < 0,0001$  la longitud del radio de una circunferencia tal que un arco de  $60^\circ$  tiene una longitud de 6cm.

[7] Si la suma de 2 ángulos es  $1,932952147$  radianes y su diferencia es  $10^{\circ}45'$ .  
¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

[8] Calcula los ángulos interiores del triángulo de la figura, según los datos:

$$\hat{b} = x + 15^{\circ}20'$$



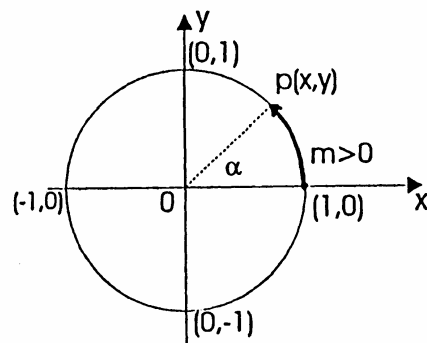
### 9\*3 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Es importante que recurras a la bibliografía para recordar lo que ya aprendiste sobre este tema, puesto que utilizaremos los conceptos básicos de funciones trigonométricas de números reales.

### 9\*3\*1 CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA:

Sea el número real  $m$  la longitud del arco considerado a partir del punto  $(1,0)$  tomado como.

Al extremo de dicho arco notaremos punto  $P$  de coordenadas  $(x,y)$ , centro  $(0;0)$  radio :  
1



Si  $P$  recorre la circunferencia en **sentido antihorario** (positivo) el arco descrito será **positivo**, en caso contrario será negativo.

A cada arco  $m$  le corresponde un único punto  $P(x,y)$ , pero a cada punto  $P(x,y)$  le corresponde infinitos, arcos de la forma  $m + 2k\pi$ ,  $k \in Z$

**Ejemplo :** Al número  $m = \frac{\pi}{2}$  le corresponde  $Q(0,1)$ . Pero a  $Q(0,1)$  le corresponden  $m = \frac{\pi}{2}$ ;  $m = \frac{5\pi}{2}$ ;  $m = -\frac{3\pi}{2}$  e infinitos valores que difieren en  $2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

### 9\*3\*2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

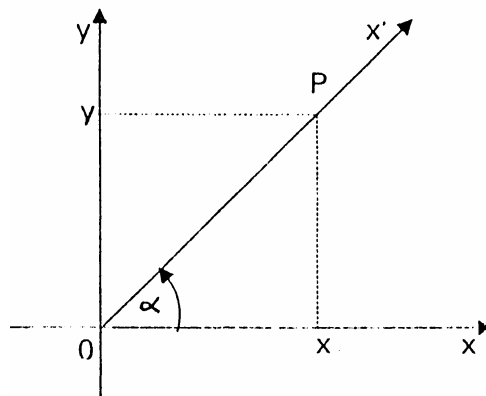
- $P$  es un punto cualquiera, tal que  $P(x,y) \neq (0,0)$
- $\rho$  = med  $OP$  (radio vector). ( $\rho > 0$ )
- $x$  = abscisa
- $y$  = ordenada

Para un ángulo  $\hat{\alpha}$  las definiciones de las funciones trigonométricas referidas a un sistema de coordenadas, son:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{y}{\rho} \qquad \text{Cosec } \alpha = \frac{\rho}{y} \qquad y \neq 0$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{\rho} \qquad \text{sec } \alpha = \frac{\rho}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\text{tag } \alpha = \frac{y}{x} \quad x \neq 0 \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{x}{y} \qquad y \neq 0$$

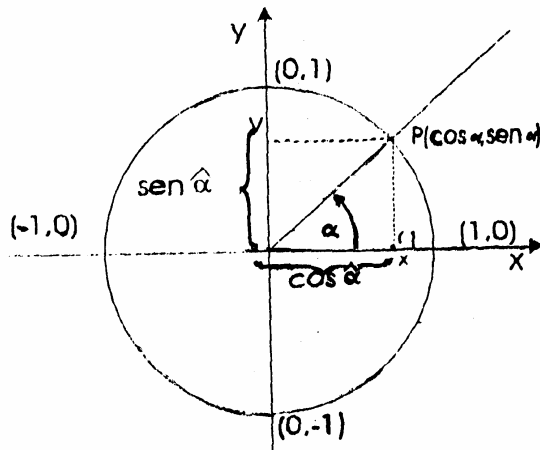


**Atención** Los signos de  $x$  e  $y$  dependen de la ubicación de  $P(x,y)$ . En particular las coordenadas del  $P(x,y)$  en la circunferencia trigonométrica son  $(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$  o sea :  $x = \cos \alpha$  ;  $y = \text{sen } \alpha$

Sabemos que  $\rho = 1$  y según las definiciones:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} \rightarrow y = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x \rightarrow x = \operatorname{cos} \alpha$$



Tanto la abscisa como la ordenada pueden tomar valores reales en el  $[-1,1]$  en consecuencia podemos afirmar que:

$$\forall \alpha \text{ es } -1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1 \quad \text{ó bien } \forall \alpha \text{ es } |\operatorname{sen} \alpha| \leq 1$$

$$\forall \alpha \text{ es } -1 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1 \quad \text{ó bien } \forall \alpha \text{ es } |\operatorname{cos} \alpha| \leq 1$$

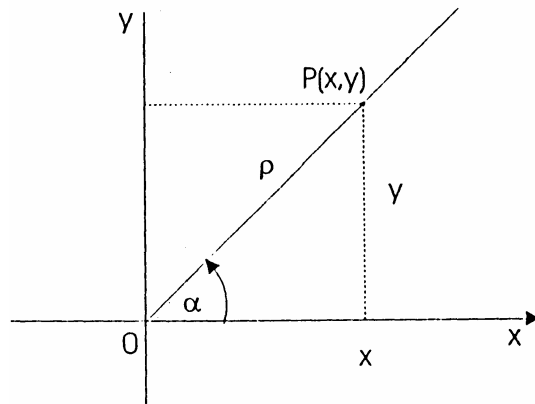
### 9\*3\*3 SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMICAS

Los signos de las funciones trigonométricas dependen de la ubicación del  $P(x,y)$ , que pertenece al lado terminal del ángulo cuyo lado inicial es el semieje  $\overrightarrow{ox}$  y su centro  $(0,0)$

Entonces:

- Si  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  todas las funciones trigonométricas de dicho ángulo son positivas.  
( $x > 0, y > 0, \rho > 0$ )
- Si  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  son positivas el seno y la cosecante y negativas todas las demás funciones ( $x < 0, y > 0, \rho > 0$ )

- Si  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  son positivas la tangente y cotangente y negativas las demás funciones ( $x < 0, y < 0, \rho < 0$ )
- Si  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  son positivas el coseno y la secante y negativas las demás funciones ( $x > 0, y < 0, \rho > 0$ )



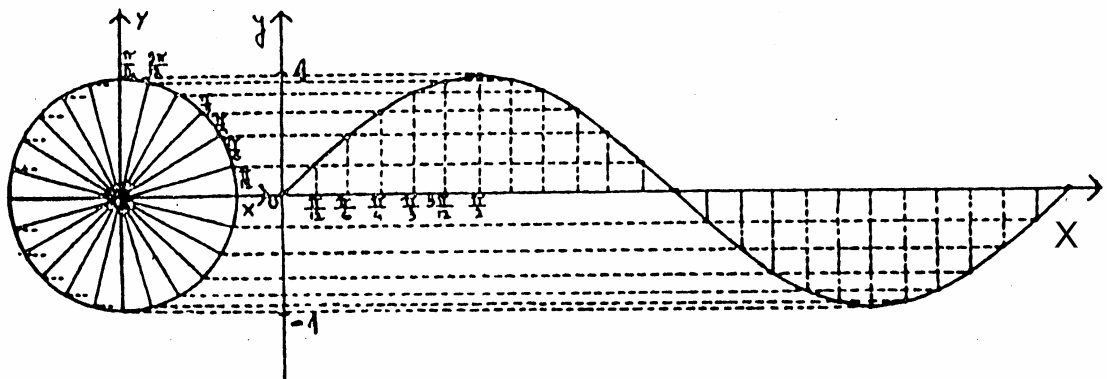
### 9\*3\*4 GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

**A) Función SENO:** Todo número real  $\alpha$  determina un punto P sobre la circunferencia trigonométrica. Definimos la **función seno** asignando al número real la ordenada del punto P.

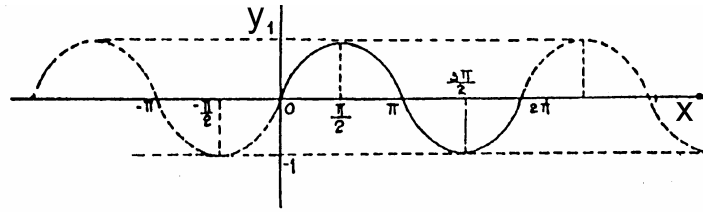
Sobre una circunferencia de radio unitario ubicamos los números reales:  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

etc. y construimos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (ver el gráfico).

Sobre el eje de abscisas se trasladan los valores de los arcos  $x$  considerados en la circunferencia, luego se trasladan los segmentos  $y$ , correspondientes a las ordenadas de cada punto P, al sistema de coordenadas, paralelamente a si mismos.



La gráfica anterior nos muestra **una onda de senoide**, que se repite para valores de  $x > 2\pi$ , como también para los valores de  $x < 0$ .



Por lo tanto, para todo  $x \in \mathfrak{R}$  está definido y es único el número real:  $\text{sen } x$ , luego el dominio es:

$$\text{Dom}(\text{sen } x) = \mathfrak{R} \quad \text{y} \quad \text{la imagen: } \text{Im}(\text{sen } x) = [-1, 1]$$

- **Ceros o raíces de la función seno**

$$\text{Ceros Sen} = \{x \in \mathfrak{R} / x = k\pi, \}$$

- **Periodicidad**

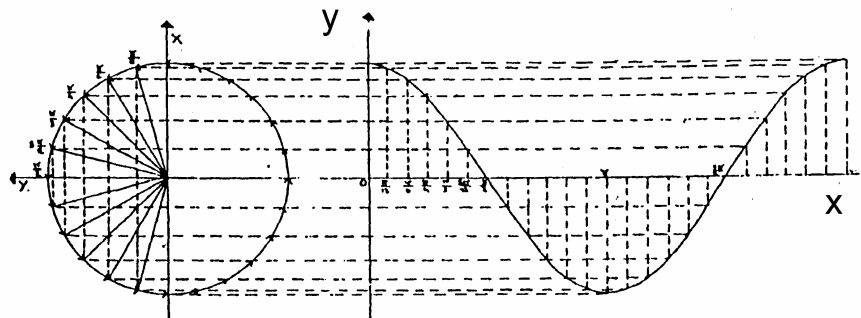
Una función **f** es periódica si existe un número real  $T > 0$  tal que para  $x \in \text{Dom } f$  se cumple que

$f(x) = f(x+T)$ ; el mínimo valor de  $T$  para el cual se cumple la igualdad se llama período  $T$ .

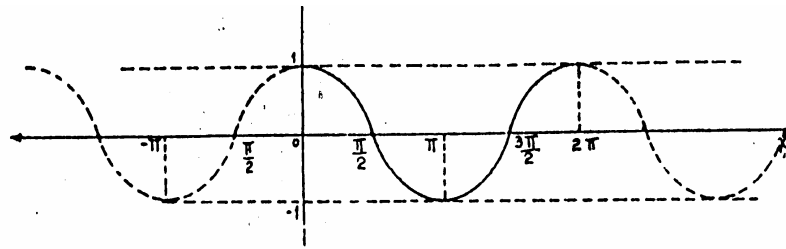
En el caso de la función seno,  $T = 2\pi$  pues:  
 $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi)$ ;  $\text{sen } x = \text{sen}(x + 4\pi)$ ; etc.

En general:  $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

**B) FUNCION COSENO:** El análisis de esa función se hace en forma análoga a la descrita para la anterior, pero, teniendo en cuenta que definimos la **función coseno** asignando al número real, que determina un punto  $P$  sobre la circunferencia trigonométrica, la abscisa del punto  $P$ .



Si extendemos la gráfica, para valores de  $x > 2\pi$  y para valores de  $x < 0$ , es:



Vemos :  $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$

$\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$

Vemos:  $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$

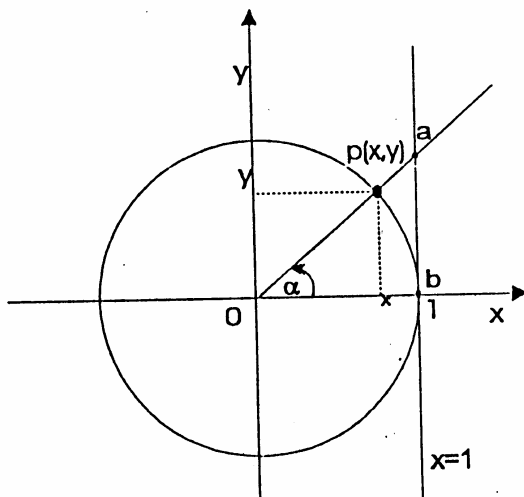
$\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$

- **Ceros o raíces de la función coseno**

$$\text{Ceros } \cos = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- **Periodicidad:** Análogamente a la de la función seno.

**C) FUNCION TANGENTE:**



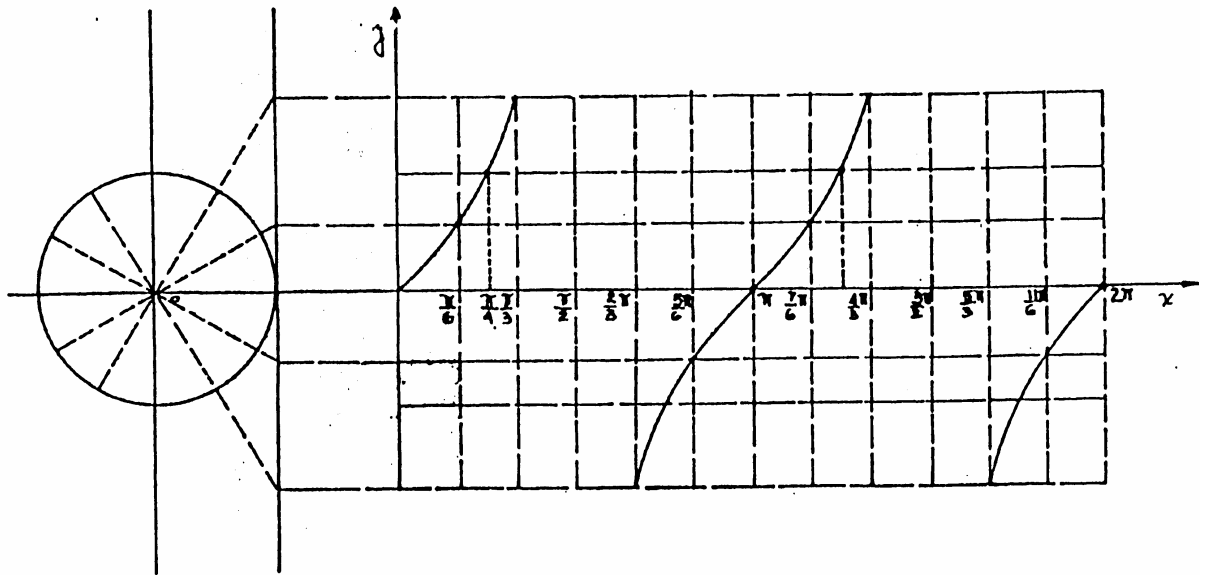
Si consideramos el punto a, de intersección entre la recta vertical

de ecuación  $x = 1$ , con el lado terminal del ángulo central  $\alpha$ , por semejanza de triángulos entre los triángulos rectángulos  $oxp$  y  $oba$ , es

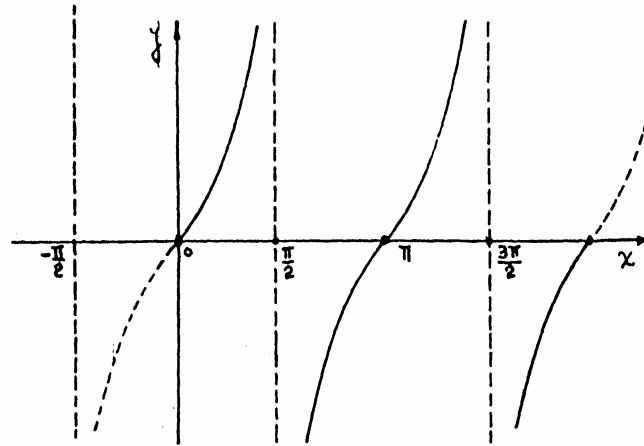
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\overline{ap}}{1} = \overline{ap}$$

es decir la tangente  $\alpha$  es igual a la medida  $\overline{ap}$

Gráficamente, para valores de  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$



Si extendemos la curva a todo el dominio de definición, es:



$$\text{Dom}(tg) = \left\{ x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Im}(tg) = \mathbb{R}$$

- **Ceros o raíces de la función tangente**

$$\text{Ceros } tg = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

- **Periodicidad:**  $T = \pi$  pues :  $tg x = tg(x + \pi)$

El análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas recíprocas, quedan para tu ejercitación.

### 9\*3\*5 RELACIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

A la relación inversa de  $f / f(x) = \text{sen } x$  se la llama **arco seno de x** y se la simboliza  $\text{arc sen } x = \text{sen}^{-1}x$

(ESTA NOTACION NO ES NOTACION EXPONENCIAL)

**Ejemplo:** Si  $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} = \text{arc sen } \frac{1}{2}$

Como  $\frac{\pi}{6}$  no es el único número real al que le corresponde por seno el valor  $\frac{1}{2}$  se escribe:

$$\frac{\pi}{6} = \left\{ x \in \mathfrak{R} / x = \text{arc sen } \frac{1}{2} ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Es este el concepto que necesitas por ahora, pues en la asignatura Matemática I, analizarás las restricciones de dominio y/o codominio para definir las funciones trigonométricas inversas.

*Ya estás en condiciones de observar los resultados de tu estudio en esta parte de Trigonometría.*

**[9]** Aplica la definiciones de funciones trigonométricas, para determinar el valor de las mismas, con los siguiente ángulos:

$$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$

**[10]** El lado terminal de un ángulo  $\alpha$ , referido a un sistema de coordenadas, contiene al punto Q(-2,3), calcula según las definiciones:

$$10.1) \text{sen } \alpha \quad 10.2) \text{cos } \alpha \quad 10.3) \text{tg } \alpha$$

**[11]** Califica de verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones **y** justifica tu respuesta

$$11.1) \{x \in \mathfrak{R} / 0 \leq x < 2\pi \text{ y } \text{sen } x < 0\} = (\pi, 2\pi)$$

$$11.2) \text{ Existe } x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ tal que } \text{sen } x \in \mathfrak{R}^-$$

$$11.3) \text{ Si } \text{sen } x = m, \text{ entonces } \text{sen}(x + 2\pi) = m$$

$$11.4) \{x \in \mathfrak{R} / 0 \leq x < 2\pi \text{ y } \text{sen } x = -1\} = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$$

- 11.5)  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \{x \in \mathfrak{R} / \cos x < 0\}$   
 11.6)  $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \left\{x \in \mathfrak{R} / \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \cos x \leq 0\right\}$   
 11.7) La función coseno, definida en  $\mathfrak{R}$  tiene período  $\pi$   
 11.8)  $\{x \in \mathfrak{R} / \operatorname{tg} x = 0\} = \{x / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$   
 11.9)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] = \{x \in \mathfrak{R} / 0 \leq x \leq 2\pi, \operatorname{tg} x > 0\}$   
 11.10)  $\operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \mathfrak{R} - \{x / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$   
 11.11) Si  $x \in [0; 2\pi]$  y  $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$

**[12]** Coloca el signo que corresponda ( > ó < ) en el espacio en blanco:

- 12.1)  $\operatorname{sen} 1^\circ$  .....  $\operatorname{sen} 1$   
 12.2)  $\operatorname{cos} 1^\circ$  .....  $\operatorname{cos} 1$   
 12.3)  $\operatorname{tg} 1^\circ$  .....  $\operatorname{tg} 1$

**[13]** Analiza la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones y justifica tu respuesta

- 13.1)  $\frac{-\pi}{2}$  es un cero de la función seno  
 13.2)  $\frac{\pi}{2}$  es una raíz de la función tangente  
 13.3)  $5\pi$  es un cero de la función seno  
 13.4)  $\frac{-3\pi}{2}$  es una raíz de la función coseno

**[14]** Analiza inyectividad, suryectividad y biyectividad de la función  $f$  para el dominio y codominio señalado en cada caso, colocando la cruz en el casillero correspondiente cuando se cumpla la definición.

14.1)

$f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / y = \operatorname{sen} x$	INYECTIVA	SURYECTIVA	BIYECTIVIDAD
I) $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$			
II) $f : \mathfrak{R} \rightarrow [-1, 1]$			
III) $f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$			

IV) $f: [-2\pi, 0] \rightarrow [-1, 1]$			
V) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$			

14.2)

$f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / y = \cos x$	INYECTIVA	SURYECTIVA	BIYECTIVIDAD
I) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$			
II) $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$			
III) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow [-1, 1]$			
IV) $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$			

[15] Expresa **x** en relación con **y** en los siguientes casos:

15.1)  $y = \text{sen } 4x$                       15.4)  $y = \cos \frac{x}{4}$

15.2)  $y = 2 \cos x$                       15.5)  $y = 2 \text{ sen } 5x$

15.3)  $y = 5 \text{ arc tg } x$                       15.6)  $y = \text{arc sen } \frac{x}{2}$

**9\*3\*6 RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN MISMO ANGULO**

A) Relación Pitagórica :  $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

B)  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha \neq 0$

C)  $\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \quad \text{sen } \alpha \neq 0$

$$D) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \cot \alpha \neq 0$$

$$E) \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$F) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{sen} \alpha \neq 0$$

Conocida la función de un ángulo y el cuadrante al que pertenece, es posible calcular los valores de las restantes funciones trigonométricas, utilizando adecuadamente las relaciones anteriores .

**EJEMPLOS:**

I) Si  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  y  $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ , calcula las funciones

trigonométricas restantes.

- **Selección de estrategias:** la relación pitagórica.

- **Ejecución del plan:**  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{3}{4} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$|\operatorname{sen} \alpha| = \frac{1}{2}$$

- **Análisis para la elección de la solución**

El ángulo está ubicado en el tercer cuadrante y el seno es negativo:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-1}{2}$

Utilizando la relación: B) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Con la aplicación de las relaciones C), E) y F), hallamos:

$$ctga\alpha = \sqrt{3} \quad , \quad sec\alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad cosec\alpha = 2$$

II) Calcula la  $tg\alpha$ , si  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  y  $sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• **Problema definido:**  $tg\alpha = ?$

• **Búsqueda y selección de estrategias:**

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para calcular la  $tg\alpha$  necesitamos conocer el  $cos\alpha$  y haciendo uso de la relación pitagórica podemos llevar a cabo la:

• **Ejecución del Plan:**

1)

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$|cos\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{el ángulo pertenece al segundo cuadrante por lo tanto } cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Entonces:  $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow tg\alpha = -1$$

• **Revisión:** La tangente resultó negativa, y verificamos que dicho signo correcto de acuerdo con lo estudiado previamente.

Recurre a Bibliografía para recordar las relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos: complementarios, suplementarios, que difieren en  $\pi$  y opuestos.

**[16]** Determina las demás **funciones trigonométricas** de  $\alpha$  siendo:

$$16.1) \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{4} \quad y \quad \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

$$16.2) \cos \alpha = \frac{3}{4} \quad y \quad \operatorname{sen} \alpha < 0$$

$$16.3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2} \quad y \quad \cos \alpha < 0$$

$$16.4) \cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad y \quad \operatorname{tg} \alpha < 0$$

**[17]** Contesta verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones y justifica tu respuesta.

$$17.1) \cos \alpha + \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = 2 \cos \alpha$$

$$17.2) \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$17.3) \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}(-45^\circ) = 2$$

$$17.4) \operatorname{cosec} 30^\circ = \operatorname{cosec} 210^\circ$$

$$17.5) \sec 60^\circ + \sec(-60^\circ) = 0$$

$$17.6) \cot g 105^\circ = \cot g 75^\circ$$

#### 9\*4 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad que se verifica para cualquier valor de los ángulos que intervengan en ella.

*A partir de las definiciones de las razones trigonométricas, de las relaciones fundamentales y de las operaciones elementales, debemos lograr una identidad algebraica evidente.*

#### EJEMPLOS:

l) Verifica que para todo  $x \in \mathfrak{R}$  se satisface:

$$\begin{aligned}
 (\cos x - \operatorname{sen} x)^2 &= 2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \\
 \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x &= 2 - (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) \\
 1 - 2\operatorname{sen} x \cos x &= 2 - (1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - 2\cancel{\operatorname{sen} x \cos x} &= 2 - 1 - 2\cancel{\operatorname{sen} x \cos x} \\
 1 &= 1
 \end{aligned}$$

II) No siempre las identidades se verifican para todo  $x \in \mathfrak{R}$  y es necesario analizar su dominio para hacer la restricción correspondiente.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 2\operatorname{tg} x + 1 &= \frac{\cos x + 2\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{con } x \in \mathfrak{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 2\operatorname{tg} x + 1 &= \frac{\cos x}{\cos x} + 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\
 \underline{2\operatorname{tg} x + 1} &= \underline{1 + 2 \operatorname{tg} x}
 \end{aligned}$$

**[18]** Verifica las siguientes identidades y determina su dominio de validez.

$$18.1) \sec x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cos x$$

$$18.2) \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$$

$$18.3) 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$18.4) \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \sec^2 x$$

$$18.5) \sec x + \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$18.6) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \sec^2 x}{\cos^2 x}$$

### 9\*5 ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

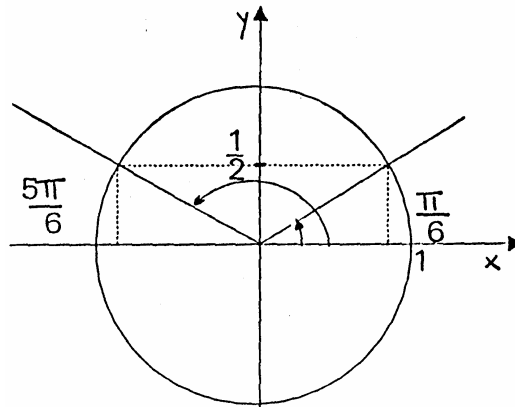
Ya conoces la forma de resolver ecuaciones ; trabajo que consiste en encontrar valores de la o las variables que satisfacen la igualdad propuesta.

Una **solución particular** representa cualquier valor que satisface la ecuación.

La **solución general** de la ecuación es el conjunto de todas las soluciones particulares.

En tu búsqueda y selección de estrategias para ejecutar el plan trazado, conviene tener en cuenta las relaciones inversas de las funciones trigonométricas, la circunferencia trigonométrica y todo lo estudiado hasta el momento.

No olvides tu calculadoras!!!



**EJEMPLO:**

Resuelve la ecuación:  $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

- La ecuación es equivalente a :  $x = \frac{1}{2}$
- Si graficamos en la circunferencia trigonométrica:  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ , se visualizan **dos** valores que corresponden a la solución particular de la ecuación dada.

Ellos son:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad y \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad \text{ó bien, } x_1 = 30^\circ \quad y \quad x_2 = 150^\circ$$

- El lado terminal de cualquier ángulo congruente con  $30^\circ$  coincide con el lado terminal de  $x_1 = 30^\circ$  y las funciones trigonométricas de ángulos congruentes son iguales. Análogamente sucede con  $x_2 = 150^\circ$

Entonces la solución **general** de la ecuación es:

$$S = C_{30^\circ} \cup C_{150^\circ}, \quad \text{ó bien, } S = C_{\frac{\pi}{6}} \cup C_{\frac{5\pi}{6}}$$

Otra forma de expresar la solución:

$$S = \left\{ x / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \right\} \cup \left\{ x / x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

- Con la calculadora se pueden verificar resultados; para  
 a)  $x = 30^\circ$  ;      b)  $x = -330^\circ$  ;      c)  $x = 510^\circ$

Lo hacemos a partir a  $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

**secuencia:**

a)  $30 \left[ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \circ \end{array} \right]$  SIN y se obtiene: 0,5

(COMPRUEBA QUE EL MODO ESTE EN DEG)

b) y c) se verifican en forma similar.

**Observación:** Si bien el análisis de una ecuación es indispensable para dar la solución correcta, puedes facilitar este proceso con tu calculadora.

En la ecuación anterior, la solución particular la hubieras obtenido, siguiendo esta **secuencia:**

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{\text{INV}} \quad \boxed{\text{SIN}} \quad y \text{ se obtiene } 30^\circ \text{ (el modo en DEG)}$$

o bien

$\frac{1}{2}$  INV  SIN  y se obtiene 0,52359877 (el modo en RAD)

**[19]** Elegir la alternativa correcta.

Justificar:

0
$+\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$

$$\frac{\operatorname{cosec}(-945^\circ)}{2} + \operatorname{sen}15\frac{\pi}{4} =$$

**[20]** Determina la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 20.1) 2\operatorname{sen} x = \sqrt{2} & 20.3) 2\operatorname{sen} x \cdot \cot x - 1 = 0 \\ 20.2) 2\cos x + 3 = 0 & 20.4) \cos x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x \end{array}$$

**[21]** Determina todos los  $x \in \mathfrak{R}$  tal que  $0 \leq x < 360^\circ$

$$\begin{array}{ll} 21.1) \cos x = \frac{1}{2} \sec x & 21.3) 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \\ 21.2) \operatorname{tg} x = 3 \cot x & 21.4) \frac{2 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = 2 \end{array}$$

**[22]** Determina analíticamente la  $\operatorname{tg} x$ , si

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad \cot x < 0$$

**[23]** Determina el valor de  $x$ , en:

$$23.1) \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{si} \quad \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$23.2) \quad \cos(2x+10^\circ) = \operatorname{sen}(5x-4^\circ) \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq (2x+10^\circ) \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq (5x-4^\circ) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[24] Dado un número real  $x$ , tal que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  se sabe que: "el doble del seno de  $x$  por la cotangente de  $x$  es igual a  $\frac{3}{2}$ "

- 24.1) Plantea una ecuación que te permita hallar el  $\cos x$ .  
 24.2) Calcula el  $\operatorname{sen} x$  y la  $\operatorname{tg} x$ .  
 24.3) Determina  $x$ .

[25] Resuelve los siguiente sistemas en los que  $x$  e  $y$  son ángulos positivos y menores que un giro.

$$25.1) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \end{cases} \quad 25.2) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos^2 y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

**Sabías que ...**  
 la función sinusoidal está presente en radios AM y FM.

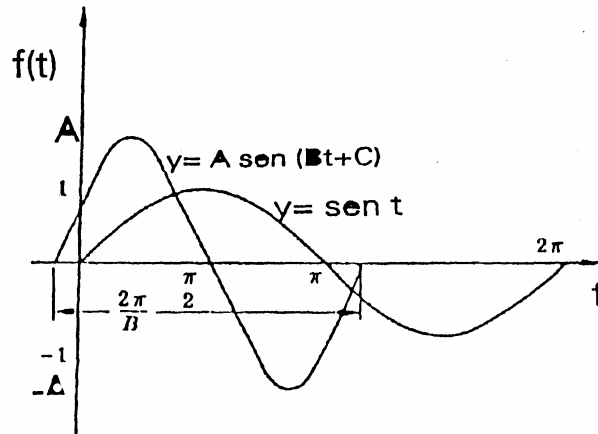
La función senoide, de la forma:

$y = A \operatorname{sen}(Bt + C)$  determina con los valores  $A$ ,  $B$  y  $C$  (positivos), una influencia especial en la mencionada función.

- El efecto de  $A$  es modificar la 'altura' de la onda y se llama **AMPLITUD**
- La variación de  $B$  produce un 'plegamiento' o estiramiento longitudinal de la onda,  
 es decir, modifica el **período** de la función según la fórmula  $T = \frac{2\pi}{B}$  y también modifica la posición de los ceros.

Asociada al período se encuentra la **frecuencia**, dada por  $\omega = \frac{1}{T}$  que indica las oscilaciones completas o ciclos por unidad de tiempo.

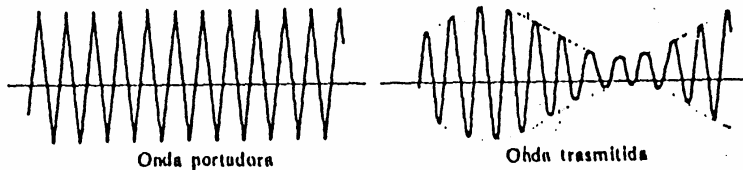
- El valor  $C$  (para  $B=1$ ), indica el inicio de una onda completa en el punto de abscisa  $C$ , es decir, desplaza el inicio de la onda. Se lo denomina **ángulo de fase**.



### Radio AM

El proceso de **amplitud modulada o am**, modifica la amplitud de onda para transmitir la señal.

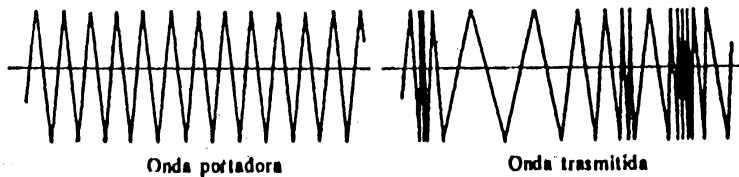
La ecuación  $y = A_0(1 + m \text{ sen } 2\pi \cdot a \cdot t) \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \omega_0 \cdot t$  representa la onda transmitida en el sistema de amplitud modulada o AM, cuya gráfica aparece en la siguiente figura:



### Radio FM

El proceso de **frecuencia modulada o fm**, modifica la frecuencia de onda portadora para transmitir la señal.

La ecuación  $y = A_0 \cdot \text{sen} \left[ 2\pi \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{a}{\omega} \text{ sen } 2\pi \cdot \omega \cdot t \right]$  representa la onda transmitida en frecuencia modulada o FM, y la gráfica es la siguiente:



### 9\*6 RESOLUCION DE TRIANGULOS

En Geometría has estudiado los **criterios** para asegurar la congruencia de dos triángulos (Es **suficiente** que tengan: los tres lados, dos lados y el ángulo comprendido dos ángulos y el lado comprendido respectivamente congruentes). Esto implica que teniendo por datos las medidas de tres elementos de un triángulo (convenientemente elegidos), es factible determinar las medidas de los **tres** elementos restantes.

El proceso por el cual se calcula estas medidas desconocidas se denomina :“resolución de triángulos”.



La palabra Trigonometría es de origen griego, siglo (XVI), y significa medida de triángulos, TRÍGONO (triángulo) y METRON (medida).

La historia de esta rama de la Matemática, que surge con la resolución de problemas de índole práctica, comienza en tiempos remotos. En el siglo XVII a. de C., los signos egipcios ya conocían la relación entre los catetos de un triángulo rectángulo que hoy denominamos tangente. Los Hindúes introdujeron seno y coseno. En el siglo II, los griegos investigaron ampliamente. La trigonometría del triángulo mantiene su rol preponderante dentro de la tecnología moderna, en navegación, agrimensura, aplicación de

#### 9\*6\*1 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

La medida de uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es siempre conocida:  $90^\circ$ . Para poder resolver un triángulo rectángulo es **suficiente** entonces dar como datos las medidas de **dos** elementos entre los que figure al menos un lado. (Dos catetos, hipotenusa y un cateto, un cateto y un ángulo agudo, hipotenusa y un ángulo agudo).

Se utilizan los siguientes recursos:

- \*En un triángulo rectángulo, sus ángulos son complementarios.
- \*Teorema de Pitágoras
- \*Definiciones de seno coseno y tangente de un ángulo agudo.

Para determinar una incógnita es necesario analizar cuál es la relación que la vincula con los datos.

Como **ejemplo**, trabajaremos con el siguiente problema:

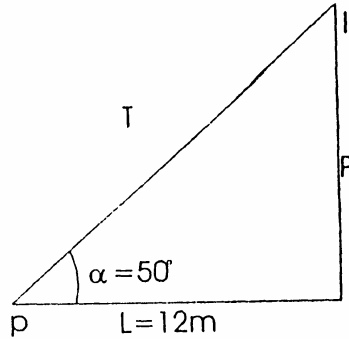
Desde el extremo superior de un poste, un tensor lo sujeta al suelo, formando un ángulo de  $50^\circ$  con el mismo. Sabiendo que el tensor está fijado a tierra a 12 metros de la base del poste , determina la altura del poste y la longitud del tensor.

- ¿Qué es lo que sabemos?, ¿qué es lo que tenemos que determinar ?

Recurrimos a una figura , para orientarnos:

Datos: -  $\alpha = \text{ángulo tpl} = 50^\circ$   
 -  $L = \text{cateto adyacente a } \alpha = 12\text{m}$

Incógnitas: -  $P = \text{cateto opuesto a } \alpha$   
 -  $T = \text{hipotenusa}$



- ¿Qué relación podemos utilizar?

1) Nos tenemos que preguntar: ¿Qué función trigonométrica del ángulo  $\alpha$  vincula al cateto opuesto  $P$  con el cateto adyacente  $L$ , es decir cuál es la función trig. que relaciona los dos datos con la incógnita  $P$ ?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{L}$$

$$P = L \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$P = 12\text{m} \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$P = 12\text{m} \cdot 1,19175$$

$$P = 14,30 \text{ m}$$

2) Análogamente, la función trigonométrica que relaciona los dos datos con la incógnita  $T$  es:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \cos \alpha = \frac{L}{T}$$

$$T = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$T = \frac{12\text{m}}{\cos 50^\circ} \rightarrow T = \frac{12\text{m}}{0,64279} = 18,67\text{m}$$

**Rta:** La altura del poste es aprox. de 14,30m y la longitud del tensor es aprox. de 18,67m.

!!!

*OBSERVACIÓN*

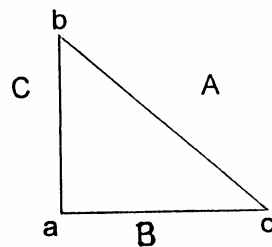
En la figura, el ángulo  $acb$  se denomina: ángulo de elevación del punto  $b$ , y el ángulo  $cbm$  se denomina: ángulo de depresión del punto  $c$ . (Ambos ángulos son congruentes por ser alternos internos entre paralelas.)

**HACER MATEMÁTICA = RESOLVER PROBLEMAS**

Saber Matemática, no es solamente aprender definiciones y propiedades para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sabemos que hacer Matemática implica ocuparse de problemas; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar sus soluciones...

Seguidamente presentamos una serie de situaciones diversas que te ayudarán a avanzar en la resolución de problemas.

**[26]** Si convenimos en designar con  $a$ , el vértice de  $\hat{a}$  ángulo recto, con  $b$  y  $c$  los vértices de los ángulos agudos y los lados con la letra mayúscula que corresponde al ángulo opuesto, determina:



26.1)  $C$  si  $\hat{b} = 78^\circ 41'$  y  $A = 10\text{cm}$

26.2)  $A$  si  $\hat{c} = 54^{\circ}56'$  y  $B = 5,47cm$

26.3)  $A$  si  $B = 12cm$  y  $C = 13cm$

26.4)  $C$  si  $A = \sqrt{5cm}$  y  $B = 2cm$

26.5)  $c$  si  $A = 54cm$  y  $C = 40cm$

**[27]** En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo es el duplo del otro y la hipotenusa mide 4cm.

Resuelve el triángulo.

**[28]** Calcula la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que un cateto es el 35% del otro. ¿Con estos datos se puede calcular la medida de la hipotenusa?.

**[29]** Calcula la hipotenusa de un triángulo sabiendo que un cateto mide 3cm y que la secante del ángulo agudo adyacente es 2,2.

**[30]** Hallar las amplitudes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que:  $7x = 10y$ , sabiendo  $x$  e  $y$  las medidas de los catetos.

**[31]** Determina el perímetro de un cuadrado, si su diagonal mide 5cm.

**[32]** Desde un mismo vértice de un cubo se trazan la diagonal de una cara del cubo y la diagonal del cubo. ¿Qué ángulo forman?.

**[33]** Sabiendo que la diagonal de un rectángulo mide 10cm, y que dicha diagonal divide al ángulo recto en 2 ángulos agudos, tales que uno de ellos es el 20% del otro, calcula el perímetro del rectángulo.