

POTENCIACIÓN , RADICACIÓN Y LOGARITMACIÓN

POTENCIACIÓN

Definición: Sea a un número real, y n un número entero positivo

1. $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$, n veces
2. $a^1 = a$, $a^0 = 1$ si $a \neq 0$, $0^n = 0$ si $n > 0$
3. $a^{n+1} = a^n \cdot a$, si $a \neq 0$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$

Regla de signos:

- Si el exponente es par, el resultado siempre tiene signo positivo.
- Si el exponente es impar, el resultado mantiene el signo de la base.

Ejemplo:

$$(-2)^3 = -8 \quad (-4)^2 = 16 \quad (2)^3 = 8 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Propiedades:

Como consecuencia de las definiciones anteriores, son válidas las siguientes propiedades, en las cuales los exponentes **m** y **n** son enteros, y las bases **a** y **b** reales y distintas de cero.

- a) Producto de potencias de igual base:
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Ej: $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2}$
- b) Cociente de potencias de igual base:
 $a^m : a^n = a^{m-n}$ Ej: $(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2}$
- c) Potencia de otra potencia:
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Ej: $(2^2)^3 = (2)^{2 \cdot 3}$
- d) Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación:
 $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ Ej: $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$
- e) Distributiva de la potencia respecto de la división:
 $(a : b)^m = a^m : b^m$ Ej: $(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3$

RADICACIÓN

Definición:

Dado un número real a , el número real b es su raíz n -ésima si se verifica que la potencia n -ésima de b es a :

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Condicionamiento de la radicación en \mathbb{R} :

1) **si $a > 0$ y n es par**, entonces existen dos números reales b y b' que verifican la condición dada, siendo b' el opuesto de b :

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \sqrt[n]{a} = -b$$

2) **si $a < 0$ y n es par**, no existe ningún número real que verifique ser la raíz n -ésima de a : $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$

3) **si n es impar**, cualquiera sea a , existe un único real b que es su raíz n -ésima: $\sqrt[n]{a} = b$

Propiedades

$$1 - \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{Ej.: } \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$2 - \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \text{ con } b \neq 0 \quad \text{Ej.: } \sqrt[3]{8 : 2} = \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}$$

$$3 - \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad \text{Ej.: } \sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[3 \cdot 4]{6} = \sqrt[12]{6}$$

$$4 - \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}}, \text{ siendo } p \text{ de } \mathbb{N}^* \quad \text{Ej.: } \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{2 \cdot 4}} = \sqrt[12]{2^8}$$

Potencia con exponente fraccionario

Toda raíz se puede escribir como potencia de índice fraccionario:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{4^5} = 4^{5/2}$$

$$\sqrt[3]{4^5} = 125^{-1/3}$$

$$\sqrt[3]{(-8)^5} = (-8)^{5/3}$$

LOGARITMACIÓN

Definición:

Dados un número real positivo a , y un real positivo b distinto de 1, existe un único número real x que verifica que: $b^x = a$, dicho real x recibe el nombre de logaritmo de a en base b .

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Cuando la base b del logaritmo es 10, se denomina logaritmo decimal y se omite el subíndice en la notación:

$$\log a = x$$

El logaritmo que tiene como base al número real e se denomina logaritmo natural o neperiano y se anota:

$$\ln a = x$$

PROPIEDADES

1-El logaritmo de 1 en cualquier base es cero. $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$

2- El logaritmo de la base es 1. $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$

3- El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.

$$\log_b (r \cdot s) = \log_b r + \log_b s$$

4- El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor

$$\log_b (r : s) = \log_b r - \log_b s$$

5- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

6- De las propiedades anteriores se deducen las dos propiedades siguientes:

$$\log_b a = \log_b^{(n)} a^n \quad \text{si } n \neq 0 \quad \text{y} \quad {}_b \log_b P = P$$

7- Cambio de base: $\log_b a = \frac{1}{\ln b} \cdot \ln a$, siendo \ln el logaritmo natural

TRABAJO PRÁCTICO n° 1

POTENCIACIÓN, RADICACIÓN Y LOGARITMACIÓN**1) Resolver aplicando propiedades:**

a) $64^{-\frac{1}{3}} : 64^{-\frac{1}{6}} =$

b) $r^{-3} \cdot s^2 \cdot r^5 \cdot s^{-2} =$

c) $\left(2^3 : 2^{\frac{1}{2}}\right) + \left[\left(4 \cdot 4^{\frac{1}{4}}\right) : 16^{\frac{1}{2}}\right] + 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{2}} =$

d) $\sqrt[6]{(-1 + 5/2 \cdot 1/2)^3} : \sqrt[4]{(1 - 65/81)} =$

e) $\sqrt[4]{1/81} : (0.3^{-3} \cdot 0.3^5)^{-1} =$

f) $\left(0,2m^3 m^{\frac{3}{2}}\right) \cdot m^{-\frac{1}{3}} =$

g) $\left[\left(\frac{6}{4^5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right] : \left[\left(\frac{2}{4^3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{2}{4^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right] =$

h) $\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \left(\sqrt[8]{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

i) $\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right) \left(1 - \sqrt[3]{2}\right) =$

2) Indicar verdadero o falso según corresponda. En caso de falsedad indicar la respuesta correcta

a) $r^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{r} = 1$

b) $\left(9^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}\right) \left(9^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}\right) = 0$

$$c) \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot 4 \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \cdot \left(\sqrt[8]{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$$

$$d) \left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{3a} + \sqrt[3]{a}\right) \cdot \left(\sqrt[6]{3} - \sqrt[6]{a}\right) = 3 - a$$

$$e) a \cdot x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} : \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^3 \cdot x^2} = a \cdot x$$

3) Resolver las siguientes ecuaciones aplicando propiedades:

$$a) 3^{x-2} = \frac{6}{3}^{x-1}$$

$$b) 0,25^x = 2^{x+1}$$

$$c) \frac{3^{2x+5}}{9} = 3$$

$$d) \left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{1/4} = 8^{x+3}$$

$$e) 3^{x-1} - 3^{-x} + 2 \cdot 3^{-1} = 0$$

$$f) \log(x+3) + \log(2x-1) = \log 2(x^2 + 4)$$

$$g) \log_k 3 + \log_{\sqrt{k}} 3 - 3 = 0$$

$$h) \ln x - \ln \sqrt{x} + \ln x^2 = \frac{1}{2}$$

$$i) \log_4 x + 3 \log_4 x = 2$$

4) Determinar el valor de x en los siguientes casos:

$$a) 5^{\log x} = 1/5$$

$$b) 3 \cdot \log_6 \log_x 15 = 45$$

$$c) 10^{(x^2-18)} = 2$$

$$d) \log_x(3x+10) = 2$$

$$e) 2^{x-\frac{x}{3}} = x \sqrt{2^{x-1}}$$

$$f) 3^{\log_x 2} + 9^{\log_x 2} = 90$$

AUTOEVALUACIÓN n° 1

1) Cada uno de los siguientes ítem tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Enciérrela o márcala con una cruz.

1.1 - $(2^2 x^4) \cdot (2x^3)^5$ es igual a:

- a) $2^7 x^{19}$ b) $2^7 x^{12}$ c) $2^{10} x^{60}$ d) ninguna es correcta

1.2 - El resultado de 0^{-4} es:

- a) -1 b) 0 c) 1 d) ninguna es correcta

1.3 - Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}$ es igual a:

- a) $\sqrt{a \cdot b}$ b) $(a \cdot b)^0 - \frac{1}{2}$ c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ d) ninguna es correcta

1.4 - El resultado de $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ es igual a:

- a) $\sqrt[6]{2^5}$ b) $\sqrt[6]{4^5}$ c) $\sqrt[6]{2}$ d) ninguna es correcta

2) Indicar si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes expresiones :

- a) $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ () b) $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ()
 c) $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9}$ () d) $\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + b$ ()

3) Determinar el valor de "x" :

- a) $\log_{1/3} 9 = x$ b) $\log_4 x = 3/2$ c) $\log_x 81 = 4$

4) Marcar con una cruz la opción correcta :

i) Si $\log_4 \left(\frac{1}{x}\right) = 3$, entonces "x" es igual a :

- a) -64 b) $\frac{1}{64}$ c) 64 d) $\frac{-1}{64}$

ii) Si $\log_x 16 = \log_3 \frac{1}{9}$, entonces "x" es igual a :

- a) 1/2 b) 2 c) 4 d) 1/4

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\log_6 (x+1) + \log_6 x = 2$ c) $27^x = 729$
 b) $2 \cdot \log_{25} x - \log_{25} (25-4x) = 1/2$ d) $4^{3x-1} = 1024$

FUNCIONES POLINÓMICAS Y POLINOMIOS FORMALES

FUNCIÓN POLINÓMICA

Definición:

Una función cuyo esquema es:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
es una función polinómica.

Los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son números reales, el exponente n de la variable x es un número natural.

Se las suele denominar simplemente polinomios.

Siempre el conjunto de partida y de llegada de una función polinómica es el conjunto \mathbb{R} de los números reales, por esto cuando se trabaja con ellas puede obviarse el esquema completo y se utiliza sólo la fórmula funcional.

El mayor exponente de la variable x es el grado de la función polinómica.

Ejemplos:

$$f(x) = x^2 + 3x^3 \qquad g(x) = 6x^4 + 2x - 1$$

El grado de la función f es 3 y el de la función g es 4.

POLINOMIO FORMAL

Definición:

Se llama polinomio formal en una indeterminada x sobre el conjunto de números reales, a toda expresión de la forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales y n es un número natural.

La letra x que figura en el polinomio formal no es un elemento variable, es una indeterminada.

Ejemplos:

$$P(x) = 3 + 4x - 3x^3$$

$$M(x) = 3x + x^2 - 4x^4$$

El grado de un polinomio formal es el mayor exponente de la indeterminada x .

En los ejemplos anteriores podemos decir que el grado del polinomio P es 3 y el grado de M es 4.

NOTA:

Toda función polinómica determina un polinomio formal y sólo uno. Y recíprocamente todo polinomio formal determina una función polinómica y sólo una.

En consecuencia el término polinomio se puede usar con ambos significados, teniendo en cuenta que si se trata de una función polinómica la x denota una variable real, y si se trata de un polinomio formal representa una indeterminada.

✓ Si en un polinomio ordenamos los exponentes en forma creciente o decreciente se obtiene un polinomio ordenado.

Ejemplos :

$$P(x) = 2 - 5x - 3x^2 \quad \text{ordenado en forma creciente}$$

$$P(x) = -3x^2 - 5x + 2 \quad \text{ordenado en forma decreciente}$$

✓ Según el n° de términos que tenga el polinomio tiene una denominación particular:

Monomio	1 sólo término	$P(x) = 3x$
Binomio	2 términos	$M(x) = 4 - 6x$
Trinomio	3 términos	$N(x) = 4 - 8x + 3x^2$
Cuatrinomio	4 términos	$R(x) = 2 - x^2 + 5x - 3x^3$

Para más de cuatro términos no hay nombre particular.

A continuación definiremos operaciones y cálculos con polinomios.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Adición:

Se llama suma de dos polinomios al polinomio único cuyos términos se obtienen sumando los términos del mismo grado (Términos semejantes)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

Ej: $P(x) = 3 - 5x + 6x^2$

$M(x) = 4 - x^2 + 10x - 3x^3$

$$\begin{array}{r} 3 - 5x + 6x^2 \\ 4 + 10x - 1x^2 - 3x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(P+Q) = 7 + 5x - 5x^2 - 3x^3$$

Sustracción:

Polinomios opuestos: **se dice que dos polinomios son opuestos cuando los coeficientes del mismo orden son opuestos.**

Ejemplo: $Q(x) = 4 + 10x - x^2 - 3x^3$ $-Q(x) = -4 - 10x + x^2 + 3x^3$

La diferencia entre dos polinomios es el polinomio único que se obtiene sumando al primero el opuesto del segundo.

Ej: $P(x) = 3 - 5x + 6x^2$

$Q(x) = 4 + 10x - x^2 - 3x^3$

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$

$$\begin{array}{r} 3 - 5x + 6x^2 \\ + \\ -4 - 10x + x^2 + 3x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(P-Q) = -1 - 15x + 7x^2 + 3x^3$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

El producto de dos polinomios es el polinomio único que puede determinarse aplicando propiedad distributiva entre los términos de uno y otro polinomio.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) = \\ &= a_0 \cdot (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) + a_1 x \cdot (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) + \dots + a_n \cdot x^n \cdot (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{r} 3 - 5x + 6x^2 \\ \times \quad 2x - 1 \\ \hline -3 + 5x - 6x^2 \\ \quad 6x - 10x^2 + 12x^3 \\ \hline -3 + 11x - 16x^2 + 12x^3 \end{array}$$

Casos especiales:

- Cuadrado de un binomio:

Por ejemplo :

Podemos resolverlo como :

aplicando propiedad distributiva obtenemos :

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= \\ (x+a) \cdot (x+a) &= \\ \mathbf{x^2 + 2xa + a^2} &= \end{aligned}$$

REGLA:

El cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término más el doble producto del primero por el segundo.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

Ej:

$$(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

- Cubo de un binomio:

Por ejemplo:

Podemos resolverlo como :

Aplicando propiedad distributiva :

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= \\ (x+a)(x+a)(x+a) &= \\ \mathbf{x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3} &= \end{aligned}$$

REGLA:

El cubo de un binomio es igual a la suma de los cubos de cada término más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo.

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

Ej:

$$(2x^2+x)^3 = 8x^6 + 12x^5 + 6x^4 + x^3$$

Los pasos a seguir son:

- En la primera fila se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado en forma decreciente.
- En la segunda fila, a la izquierda se escribe el opuesto de a
- En la tercera fila se escriben los coeficientes que se van obteniendo.

En el ejemplo anterior: $(4x^3 + 5x^2 - x + 12) : (x+2)$

	4	5	-1	12	↓ se suma por columna
- 2		-8	6	-10	
se	4	-3	5	2	

multiplica

Los tres primeros valores son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto, luego:

$$C(x) = 4x^2 - 3x + 5 \qquad R(x) = 2$$

✓ **Teorema del resto:**

Este teorema permite averiguar el resto de una división sin efectuarla. Debe aclararse que este teorema sólo se aplica cuando el divisor es de la forma $x + a$ o $x - a$.

El resto de la división se obtiene reemplazando en el polinomio dividendo a x por el valor de a cambiado de signo.

En el ejemplo anterior:

El polinomio dividendo es: $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 1x + 12$

y el polinomio divisor es: $Q(x) = x + 2$

Para aplicar el teorema debemos reemplazar en el polinomio dividendo a la x por el valor -2

$$P(-2) = 4(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) + 12 = -32 + 20 + 2 + 12 = 2$$

Entonces el resto es **2**.

TRABAJO PRÁCTICO nº 2

POLINOMIOS

1) Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = 1/2 x^5 + 2 x^4 - 1/4 x^3 - 1/3 x^2$$

$$R(x) = -1/2 x^5 + 3/4 x^3 - x$$

$$S(x) = 3/2 x^3 - 5 x^2 + 1/4 x - 1$$

$$Q(x) = 6 x^4 - 2/3 x^2 + x$$

$$T(x) = -5/4 x^3 + 3 x - 10$$

Calcular:

a) $(P(x) + Q(x)) + R(x)$

b) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

c) $3 S(x) + 2 T(x)$

2) Resolver las siguientes potencias:

a) $(4 x^2 - 2 x^{-1})^3 =$

b) $(-1/2 x^3 + 2x)^3 =$

c) $(1/4 x^4 - x^2)^3 =$

d) $(-3/2 x^5 - 2x^3)^3 =$

e) $(1/2 x^2 - 2x)^2 =$

f) $(2x^4 - 2/3 a^2)^2 =$

g) $(-3x^2 + 1/3 x^4)^2 =$

h) $(-x^3 - 1/3 x)^2 =$

3) Resolver las siguientes divisiones:

a) $(8x^3 + 12x^2 + x + 1) : (2x + 1) =$

b) $(25x^4 - 30x^2 + 9) : (5x^2 - 3) =$

c) $(3x^5 - 2x^3 + x - 1) : (x^2 - 1) =$

d) $(x^6 - 1) : (x^3 - 1) =$

e) $(x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2) : (x^3 + x^2) =$

4) Resolver aplicando Regla de Ruffini, verificar aplicando Teorema del resto:

a) $(4x^5 - x^3 + x - 6) : (x + 1) =$

b) $(3x^4 + 6x^3 + 9) : (x + 3) =$

c) $(x^3 - 23x - 28) : (x - 2) =$

d) $(x^5 + 32) : (x + 2) =$

e) $(5x^3 - 30x^2 + 30x - 20) : (x - 5) =$

5) Compruebar que $P(x) = x^3 - 7/2 x^2 - 7/2 x + 6$ es divisible por: $(x - 4)$,

$(x + 3/2)$ y por $(x - 1)$

6) Determinar el valor de m para que el cociente sea exacto:

$$(2x^3 - 3x^2 + mx - 5) : (x - 1)$$

AUTOEVALUACIÓN n° 2

1) Cada uno de los siguientes ítem tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Márcala con una cruz.

a) El cociente de $(x^5 - 1) : (x - 1)$ es :

$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$	<input type="checkbox"/>	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	<input type="checkbox"/>
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	<input type="checkbox"/>	ninguna de las anteriores	<input type="checkbox"/>

b) $(x + 1)$ es divisor de :

$x^2 - 2$	<input type="checkbox"/>	$x - 1$	<input type="checkbox"/>
$x - 2$	<input type="checkbox"/>	ninguno de los anteriores	<input type="checkbox"/>

c) El polinomio $x^2 + 8x + 12$ es igual a :

$(x+3)(x+4)$	<input type="checkbox"/>	$(x-2)(x-6)$	<input type="checkbox"/>
$(x+2)^2(x+6)$	<input type="checkbox"/>	ninguno de los anteriores	<input type="checkbox"/>

d) El polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + mx - 1$ es divisible por $(x + 1)$ si m es igual a:

3	<input type="checkbox"/>	-1	<input type="checkbox"/>
-3	<input type="checkbox"/>	Ninguna es correcta	<input type="checkbox"/>

2) Encuentra el valor de "k" en el siguiente polinomio para que $(2x^4 + kx^2 + x + 4) : (x - 2)$, tenga por resto 18.

3) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas (V), o falsas (F). Justifica tus respuestas.

- | | |
|--|--------------------------|
| a) Si $A(x) \cdot (x+3) = x^2 - 6x + 9$, entonces $A(x) = x-3$ | <input type="checkbox"/> |
| b) El resto de dividir $(x^3 + 3x^2 + 1)$ por $(x + 4)$ es -15 | <input type="checkbox"/> |
| c) El polinomio $(x^4 + 1)$ es divisible por $(x + 1)$ | <input type="checkbox"/> |
| d) Se verifica que $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ | <input type="checkbox"/> |

4) Dados los polinomios:

$$P(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x; \quad Q(x) = x^2 - \frac{1}{9} \quad \text{y} \quad T(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

Determina:

a) $P(x)^2$	b) $Q(x)^3$	c) $[P(x) \cdot Q(x)] - T(x)$
-------------	-------------	-------------------------------

5) Resuelve: $(16x^6 - 2x^5 + x^4 - 10x^3) : (8x^3 - 60x^2 + 150x - 125)$

FACTOREO

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Nos interesan los casos en los cuales al realizar la división de polinomios el resto de la misma es cero, por lo tanto el dividendo se puede expresar como el producto entre el cociente y el divisor.

Factorizar un polinomio significa transformarlo en el producto de polinomios primos. Un polinomio primo es aquel que es divisible por sí mismo y por la unidad.

Veremos ahora algunas reglas que permitan descomponer un polinomio en factores.

Primer caso: Factor común

Este caso se aplica cuando en todos los términos de un polinomio figuran uno o varios factores repetidos.

El resultado es el producto entre esos factores y el polinomio que resulta de dividir cada término por ese factor.

Para encontrar los factores repetidos se aplica la siguiente regla:

- De los coeficientes se busca el máximo común divisor.
- De las letras se busca la que esté repetida en todos los términos con el menor exponente que figura en el polinomio.

Ej:

$$P(x) = 3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x$$

El máximo común divisor de los números es 3 y la letra repetida con el menor exponente es x, por lo tanto el factor común es 3x.

Luego:

$$3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x = 3x \cdot (x - 2x^3 + 3x^2 - 4)$$

Ej:

$$T(x) = \frac{2}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 \right)$$

Ej:

$$R(x) = 8x^5 + 6x^3 - 2x^2 = 2x^2 (4x^3 + 3x - 1)$$

Segundo caso: Factor común en grupos de igual número de términos

Para factorizar un polinomio que tiene factores comunes en grupos de igual número de términos, se factorizan dichos grupos y luego se factorizan nuevamente con respecto a un nuevo factor común que aparece entre paréntesis.

Ej:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$$

Primero se arman los grupos y se encierran entre paréntesis:

$$(x^4 - 3x^3) + (x - 3)$$

En cada grupo se saca factor común

$$x^3(x - 3) + 1(x - 3)$$

Se vuelve a sacar factor común el paréntesis:

$$(x - 3) \cdot (x^3 + 1)$$

Obteniendo así el resultado final: $x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3) \cdot (x^3 + 1)$

Ej:

$$M(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6$$

Primero se arman los grupos y se encierran entre paréntesis:

$$(x^3 + 2x) + (-3x^2 - 6)$$

En cada grupo se saca factor común

$$x(x^2 + 2) + (-3)(x^2 + 2)$$

Se vuelve a sacar factor común el paréntesis:

$$(x^2 + 2) \cdot (x - 3)$$

Obteniendo así el resultado final: $x^3 + 2x - 3x^2 - 6 = (x^2 + 2) \cdot (x - 3)$

Si se resuelve la multiplicación aplicando propiedad distributiva se puede verificar si el resultado es correcto.

Tercer caso: Trinomio cuadrado perfecto

Sabemos que al resolver el cuadrado de un binomio se obtiene un trinomio llamado **trinomio cuadrado perfecto**: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

De acuerdo con la definición de cuadrado de un binomio resulta que en el trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el término restante es el doble producto de las bases de los cuadrados.

Si tenemos un polinomio de tres términos, y reconocemos en él el formato anterior, entonces se puede factorar escribiéndolo nuevamente como potencia
Ej:

$$x^2 + 4x + 4$$

Para factorarlo debemos reconocer en él, el formato del trinomio cuadrado perfecto:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

buscamos dos términos que sean cuadrados perfectos y le sacamos la raíz cuadrada

$$a^2 = x^2 \quad \text{entonces} \quad a = x$$

$$b^2 = 4 \quad \text{entonces} \quad b = 2$$

verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

$$2ab = 2 \times x \times 2 = 4x$$

Esto significa que el polinomio dado sí tiene la forma de trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se puede factorar:

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Ej:

$$4x^2 - 12x + 9$$

buscamos dos términos que sean cuadrados perfectos y le sacamos la raíz cuadrada

$$a^2 = 4x^2 \quad \text{entonces} \quad a = \sqrt{4x^2} = 2x$$

$$b^2 = 9 \quad \text{entonces} \quad b = \sqrt{9} = 3$$

verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

$$2 a b = 2 (2x) 3 = 12x$$

observamos que el término coincide, pero no el signo. Esto se debe a que el binomio que está elevado al cuadrado es una resta, por lo tanto al factorarlo debemos escribirlo como resta.

$$4 x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

Cuarto caso: Cuatrinomio cubo perfecto

Recordemos que el cubo de un binomio da por resultado un cuatrinomio llamado **cuatrinomio cubo perfecto**: $(a+b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$

Este caso es similar al anterior, sólo que el polinomio dado debe ser un cuatrinomio y el resultado del factoro debe ser el cubo de un binomio.

Ej:

$$x^3 + 6 x^2 + 12 x + 8$$

Debemos reconocer en el polinomio dado el formato $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$ para ello buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

$$a^3 = x^3 \quad \text{entonces } a = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$b^3 = 8 \quad \text{entonces } b = \sqrt[3]{8} = 2$$

Verificamos ahora si los dos términos restantes responden al formato $3 a^2 b$ y $3 a b^2$

$$3 a^2 b = 3 (x)^2 2 = 6 x^2$$

$$3 a b^2 = 3 x (2)^2 = 12x$$

Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

$$x^3 + 6 x^2 + 12 x + 8 = (x + 2)^3$$

Ej:

$$x^6 - 3 x^4 + 3 x^2 - 1$$

buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

$$a^3 = x^6 \quad \text{entonces } a = \sqrt[3]{x^6} = x^2$$

$$b^3 = -1 \quad \text{entonces } b = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Verificamos ahora si los dos términos restantes responden al formato $3 a^2 b$ y $3 a b^2$

$$3 a^2 b = 3 (x^2)^2 (-1) = -3 x^4$$

$$3 a b^2 = 3 x^2 (-1)^2 = 3 x^2$$

Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

$$x^6 - 3 x^4 + 3 x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3$$

Quinto caso : Diferencia de cuadrados

Recordemos que $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Por el carácter recíproco de esta propiedad, si tenemos un binomio que tenga la forma $a^2 - b^2$

podemos factorarlo escribiendo **$(a+b) \cdot (a-b)$**

Ej:

$$P(x) = x^2 - 9$$

como $a^2 = x^2$ entonces $a = x$

$$b^2 = 9 \quad \text{entonces } b = 3$$

este polinomio tiene la forma de diferencia de cuadrados por lo tanto su factoro es:

$$x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$$

Ej:

$$M(x) = 4x^2 - 25 = (2x + 5).(2x - 5)$$

Sexto caso : Suma o diferencia de potencias de igual grado

Recordemos lo visto en el capítulo anterior respecto de la divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases:

$x^n + a^n$ es divisible por $x+a$ si n es impar

$x^n + a^n$ no es divisible por $x - a$

$x^n - a^n$ es divisible por $x+a$ si n es impar

$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ siempre

Esto significa que si dividimos por ejemplo $x^n + a^n$ por $x + a$ siendo n impar, el resto de la división es cero.

Por lo tanto el polinomio $x^n + a^n$ puede expresarse como el producto entre el divisor $x+a$ y el cociente de dicha división.

Es decir si $P(x) : Q(x) = C(x)$ con $R(x) = 0$ entonces $P(x) = Q(x) . C(x)$

Entonces por ejemplo, dado el polinomio $x^3 + 8 = x^3 + 2^3$, sabemos que es divisible por la suma de las bases $(x+2)$. Por lo tanto se puede factorar multiplicando el divisor $(x+2)$ por el cociente de la división entre ellos.

Pero ahora debemos encontrar el cociente, para eso aplicamos la regla de Ruffini:

$$(x^3 + 8) : (x+2)$$

	1	0	0	8
- 2		-2	4	-8
	1	-2	4	0

$$C(x) = x^2 - 2x + 4$$

Por lo tanto :

$$(x^3 + 8) = (x+2).(x^2 - 2x + 4)$$

Ej:

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3$$

Aplicando el criterio de divisibilidad sabemos que es divisible por la diferencia de sus bases es decir $(x-3)$.

Para encontrar el cociente aplicamos Ruffini:

	1	0	0	- 27
3		3	9	27
	1	3	9	0

Luego el cociente es $C(x) = (x^2 + 3x + 9)$

$$x^3 - 27 = \text{divisor} \cdot \text{cociente} = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)$$

Ej:

$$x^5 - 32 = x^5 - 2^5 \quad \text{su divisor es } (x - 2)$$

aplicando Ruffini:

1	0	0	0	0	-32	
2	2	4	8	16	32	
1	2	4	8	16	0	$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

$$x^5 - 32 = (x - 2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

Casos combinados

Puede ocurrir que una vez factoreado el polinomio, en el resultado obtenido se puede aplicar otro caso más.

Ej:

$$2x^3 - 8x$$

En este caso aplicamos el 1° caso (factor común) : $2x(x^2 - 4)$

Pero en el paréntesis se puede aplicar 5° caso (diferencia de cuadrados):

$$2x(x-2)(x+2)$$

Luego $2x^3 - 8x = 2x(x-2)(x+2)$

Ej:

$$9x^4 - 36x^3 + 36x^2$$

1° caso : $9x^2(x^2 - 4x + 4)$

5° caso : $9x^2(x-2)^2$

Puede ocurrir también que en un polinomio se pueda aplicar uno u otro caso de factoro. En este caso es conveniente respetar el orden.

Ej:

$$4x^2 - 16x^4$$

En este caso se puede aplicar 1° o 5° caso, pero si se va en orden es conveniente aplicar primero el 1° caso:

$$4x^2(1 - 4x^2)$$

aplicando ahora 5° caso: $4x^2(1 - 2x)(1 + 2x)$

Común divisor de mayor grado y mínimo común múltiplo de polinomios

Definición:

Se llama divisor común de mayor grado de dos o más polinomios al polinomio de más alto grado que es divisor de todos ellos

Regla práctica para su cálculo:

Para su cálculo se factoriza cada polinomio en sus factores primos, y se halla **el producto de los factores primos comunes, tomado cada uno con su menor exponente.**

Ej:

$$P(x) = 2x - 8$$

$$Q(x) = x^2 - 8x + 16$$

factoreando:

$$P(x) = 2(x-4)$$

$$Q(x) = (x-4)^2$$

luego el divisor común de mayor grado es: **(x-4)**

Múltiplo común de menor grado

Definición:

Se llama múltiplo común de menor grado de dos o más polinomios al polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos

Regla práctica para su cálculo:

Para su cálculo se factoriza cada polinomio en sus factores primos, y **se halla el producto de los factores primos comunes o no comunes, tomado cada uno de ellos con su mayor exponente**

Ej:

$$P(x) = 6x^2 - 6x$$

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

factoreando:

$$P(x) = 6x(x-1)$$

$$Q(x) = x^2(x-1)^2$$

luego el múltiplo común de menor grado es : **$6x^2(x-1)^2$**

EXPRESIONES RACIONALES

Llamamos expresiones racionales a las expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P(x) y Q(x) son polinomios siendo Q(x) no nulo.

Estas expresiones pueden ser simplificadas si existen factores comunes en el numerador y denominador. De esta manera se obtiene su forma **irreducible.**

TRABAJO PRÁCTICO nº 3

FACTOREO

1) Primer caso: Factor común

- | | |
|---|--|
| a) $4x^2 - 12x^4 + 20x^3$
b) $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^6$
c) $\frac{2}{27}x^6 - \frac{8}{15}x^4 - \frac{10}{9}x^3 - \frac{4}{21}x^5$ | d) $4x^5 - 20x^7 + 8x^4$
e) $15x^6 - 45x^4 - 30$
f) $2x^4 + 9x^3 - 7x^6$ |
|---|--|

2) Segundo caso: Factor común en grupo

- | | |
|---|--|
| a) $8x^4 - 3x^3 - 16x + 6$
b) $10x^4 - 2x^5 + 15 - 3x$
c) $x^3 + 1/2x^2 - 1/2 - x$
d) $3x^3 - yx^2 + 6xy^2 - 2y^3$ | e) $x^3 + x^2b - 2x - 2b$
f) $x^6 + 2x^4 - 4x^2 - 8$
g) $pq^2 - 2p - q^3 + 2q$ |
|---|--|

3) Tercer caso: Trinomio cuadrado perfecto

- | | |
|--|---|
| a) $1/9x^8 + x^4 + 9/4$
b) $2 - 8x^3 + 8x^6$
c) $x^4 - 2x^2 + 1$
d) $1/16x^2 + 1/4x^8 + 1/4x^5$ | e) $25x^6 - 20x^4 + 4x^2$
f) $1/4x^{10} + 1/9 + 1/3x^5$
g) $4/9x^8 - 16/3x^6 + 16x^4$ |
|--|---|

4) Cuarto caso: Cuatrinomio cubo perfecto

- | | |
|---|--|
| a) $-x^6 + 9x^4 - 27x^2 + 27$
b) $64x^9 - 48/3x^7 + 12/9x^5 - 1/27x^3$
c) $8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1$
d) $125 + 225x^3 + 135x^6 + 27x^9$
e) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$
f) $1/27x^{12} - 2/3x^9 + 4x^6 - 8x^3$
g) $-p^9 - 6p^6x^4 - 12p^3x^8 - 8x^{12}$ | |
|---|--|

5) Quinto caso: Diferencia de cuadrados

- | | |
|--|---|
| a) $27/16x^4 - 4$
b) $0.01x^6 - 25x^4$
c) $1/16x^{10} - 64x^2$
d) $-0.16x^4 + 1/4x^8$ | e) $81x^{12} - 36$
f) $64x^{10} - 1/4a^4$
g) $2x^4 - 9$ |
|--|---|

6) Sexto caso: Suma o diferencia de potencias de igual grado

- | | |
|--|--|
| a) $x^3 + 0.001$
b) $x^7 - 128$
c) $x^6 + 1$ | d) $x^4 - 81$
e) $x^5 + 1/32$
f) $x^6 - 8$ |
|--|--|

7) Resolver los siguientes casos combinados

a) $2x^3 - 2x$

b) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

c) $216x^{12} - 324x^{10} + 162x^8 - 27x^6$

d) $216x^{12} - 324x^{10} + 162x^8 - 27x^6$

e) $2x^4 - 2x - 2x^3 + 2$

f) $3x^5 - 6x^3 + 3x$

g) $2x^7 - 12x^5 + 24x^3 - 16x$

h) $9x^6 - 36x^5 + 36x^4$

i) $2x^5 - 16x^2$

8) Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios

a) $12x^2 - 27$; $2x^3 - 8x - 3x^2 + 12$; $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

b) $3x^4 - 27$; $6x^4 - 36x^2 + 54$; $x^3 + x^2 - 3x - 3$

c) $24x^2 - 6$; $4x^3 - 36x + 2x^2 - 18$; $8x^2 + 8x + 2$

d) $x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27$; $2x^4 + 6x^2$; $4x^5 - 36x$

e) $1 + 4x + 4x^2$; $4x^2 - 1$; $1 + 8x^3$

f) $4x^2 + 25 - 20x$; $10x - 25$; $4x^2 - 10x$

g) $16x^4 - 1$; $4x - 2$; $4x^2 - 4x + 1$

9) Simplificar las siguientes expresiones racionales para hallar su forma irreducible.

a) $\frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

c) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1}$

g) $\frac{x^5 + 3x^4 - x - 3}{x^2 - 1}$

d) $\frac{5x^2 - 5}{x + 1}$

e) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

f) $\frac{-3x^3 - 3x^4 + 6x + 6x^2}{x^3 + x^2 - 2x - 2}$

AUTOEVALUACIÓN nº 3

1) Factorizar , si es posible , los siguientes polinomios :

a) $10x^2 - 5x^4 + 10x - 5x^3 =$

b) $5x^3 - 40 =$

c) $x^4 + 16 =$

d) $(a+b)x^2 + 2(a+b)x + (a+b) =$

e) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 =$

2) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) , o falsas (F) .
Justificar las respuestas .

a) $(x^2 - 3)$ es divisible por $(x + 3)$ ()

b) $(x^5 - 1)$ es divisible por $(x - 1)$ ()

c) La factorización de $x^2 - 2x + 4$ es $(x - 2)^2$ ()

d) La factorización de $(x^3 + 27)$ es $(x-3)(x^2 + 3x + 9)$ ()

3) Cada uno de los siguientes ítems tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta.. Marca con una cruz la que consideres correcta:

a) La factorización de $3x^2 - 15x - 42$ es :

$(x+2)(x-7)$ () $3(x+2)(x-7)$ ()

$3(x-2)(x-7)$ () ninguno de los anteriores ()

b) Al factorizar $-x^3 - 6x^2 - 12x - 8$ obtenemos :

$(-x+2)^3$ () $(-x-2)^3$ ()

$(-2+x)^3$ () ninguno de los anteriores ()

c) La expresión $\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 - x^2 - 9x + 9} \cdot (x - 3)$, factorizada y simplificada es igual a:

$x + 1$ () $\frac{x+1}{x-3}$ () $x - 3$ () Ninguna es correcta ()

4) Encuentra el M. C. D. , y el m. c. m entre los siguientes polinomios :

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, $Q(x) = x^2 + 4x + 4$, $S(x) = x^2 - 4$

6) Simplifica las siguientes expresiones algebraicas racionales :

a) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} =$

b) $\frac{x+1}{x^2 + x} =$

c) $\frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x} =$

d) $\frac{5x+10}{x^2 - 1} : \frac{3x+6}{x+1} =$

e) $\left(\frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 9} \right) \cdot \frac{5x+15}{x^3 - 4x^2} =$

