# Administração

**MATEMÁTICA FINANCEIRA**

***Por: EDÉZIO SACRAMENTO***
*edezio@oi.com.br*

## Taxa Interna de Retorno

- Denomina-se *Taxa Interna de Retorno (TRI)* de um fluxo de caixa à taxa de juros que anula o *Valor Presente Líquido (VPL)*.

- A *Taxa mínima de atratividade* é a taxa de juros abaixo da qual o investidor prefere não realizar o investimento.

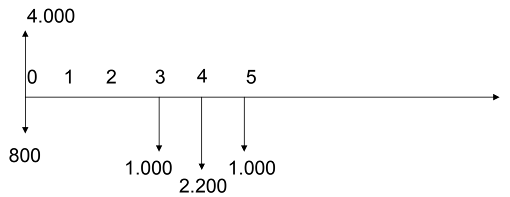


## Exemplo

- Uma compra cujo valor à vista é de R$ 4.000,00 pode ser paga com uma entrada de 20% mais três parcelas mensais de R$ 1.000,00, R$ 2.2000,00 e R$ 1.000,00, respectivamente. Considerando que existe um período de carência de 3 meses para início do pagamento das parcelas, calcular o custo efetivo do financiamento.



## Exemplo




$$VPL(i^*) = 4.000 - 800 - \frac{1.000}{(1+i)^3} - \frac{2.200}{(1+i)^4} - \frac{1.000}{(1+i)^5} = 0$$

## Exemplo

- Calculadora HP-12C
- (f)(REG) → apaga os registros
- 3.200(g)($CF_0$) →1º fluxo
- 0(g)($CF_j$) → 2º fluxo
- 0(g)($CF_j$) → 3º fluxo
- 1.000(CHS)(g)($CF_j$) → 4º fluxo
- 2.200(CHS)(g)($CF_j$) → 5º fluxo
- 1.000(CHS)(g)($CF_j$) → 6º fluxo
- (f)(IRR) → 7,064% calcula a TIR



## Exemplo

- Um apartamento foi colocado à venda por R$ 107.800. A prazo pode ser pago com uma entrada de R$ 8.000 mias 5 prestações mensais consecutivas. As duas primeiras de R$ 18.000, e as três últimas de R$ 23.000. Se o comprador tem a opção de aplicar seu capital em um fundo de renda fixa a juros efetivos de 1,4% a.m., qual será a melhor alternativa do ponto de vista financeiro considerando-se que a pessoa tenha recursos para comprá-lo até mesmo à vista?
- A melhor opção é comprar a vista pois a TIR é 1,6375% maior que a rentabilidade alternativa.



## Exemplo

- Calculadora HP-12C
- (f)(REG) → apaga os registros
- 99.800(g)($CF_0$) →1º fluxo
- 18.000(CHS)(g)($CF_j$) → 2º fluxo
- 18.000(CHS)(g)($CF_j$) → 3º fluxo
- 23.000(CHS)(g)($CF_j$) → 4º fluxo
- 23.000(CHS)(g)($CF_j$) → 5º fluxo
- 23.000(CHS)(g)($CF_j$) → 6º fluxo
- (f)(IRR) → 1,6375% calcula a TIR



## Capitalização Contínua

- Se um valor *P* é investido por ***b*** anos a uma taxa nominal anual de juros ***r*** e com ***n*** períodos de capitalização durante o ano, o valor futuro *F* pode ser expresso por:

$$F = P \, . \, (1 + r / n)^{n.b}$$

Fazendo: $r / n = 1 / k$ teremos que: $n = r.k$

e:

$$F = P \, . \, (1 + 1/k)^{r.k.b} = P \, . \, [\, (1 + 1/k)^{k} \,]^{r.b}$$

## Capitalização Contínua

- Se o número de períodos de capitalização *n* tende a infinito, *k* também tenderá:

$$F = P \,.\, \lim_{k \to \infty} [\,(1 + 1/k)^k\,]^{r.b}$$

Ora: $\lim_{k \to \infty} (1+1/k)^k = e \qquad (e = 2.7182818...)$

Logo: $$F = P \,.\, e^{r.b}$$



## Capitalização Contínua

- A taxa nominal *r* da capitalização contínua pode ser convertida para uma taxa anual efetiva $i_{Ea}$ igualando-se o valor futuro:

$$F = P \,.\, e^{r.b} = P \,.\, (1 + i_{Ea})^b$$

ou

$$e^{r.b} = (1 + i_{Ea})^b$$

ou finalmente: $$i_{Ea} = e^r - 1$$



## Capitalização Contínua

- Embora as fórmulas da capitalização contínua presumam que os juros sejam continuamente computados e acrescidos ao principal ao longo do período, os resultados que oferecem são muito próximos daqueles obtidos ao se considerar a capitalização diária com a taxa nominal *r*.



## Capitalização Contínua

- A tabela abaixo mostra uma comparação entre taxas de juros efetivas em regimes de capitalização diária e contínua para quatro taxas nominais diferentes.

| Taxa Nominal (%a.a.) | Taxa Efetiva (%) | | Diferença (%) |
|---|---|---|---|
| | Contínua | Diária (*) | |
| 5,00 | 5,12711 | 5,12674 | 7,2165E-03 |
| 10,00 | 10,51709 | 10,51555 | 1,4643E-02 |
| 15,00 | 16,18342 | 16,17981 | 2,2307E-02 |
| 20,00 | 22,14028 | 22,13358 | 3,0262E-02 |

(*) Ano de 365 dias, calculada como $i_{Em} = (1+r/365)^{365} - 1$.

## Exemplo

- Calcular a taxa efetiva i correspondente a uma taxa nominal de 12% a.a. num regime de capitalização contínua.

Sabemos que: $i_{Ea} = e^{r} - 1$

'Passando' exponencial com base e teremos:

$$i_{Ea} = e^{0,12} - 1$$

ou: $i_{Ea} = 1{,}127497 - 1$

Finalmente: $i = 0{,}127497 = 12{,}7497\%$ a.a.



## Planos de Amortização de Empréstimos e Financiamentos

- O reembolso de um empréstimo consiste em efetuar pagamentos periódicos (prestações) de modo a liquidar o débito onde :

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS
(é uma série uniforme)



## Sistema de Amortização Francês

É devolvido o principal mais os juros em prestações iguais e periódicas. É o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Os juros incidem sobre o saldo devedor que por sua vez decresce na medida em que as prestações são pagas, estes juros são decrescente e, consequentemente, as amortizações do principal são crescentes.



## Sistema de Amortização Francês

- Um empréstimo de R$ 200.000,00 será pago pelo Sistema Francês de Amortização em 4 prestações mensais postecipadas. Se a taxa de juros efetiva contratada for de 10% a.m., construir a planilha de amortização.

## Sistema de Amortização Francês

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t=SD_{t-1}$ - $Am_t$ | Amortização $Am_t=A_t$-$J_t$ | Juros $J_t$=i x $SD_{t-1}$ | Prestação $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 156.906,00 | 43.094,00 | 20.000,00 | 63.094,00 |
| 2 | 109.502,60 | 47.403,40 | 15.690,60 | 63.094,00 |
| 3 | 57.358,86 | 52.143,74 | 10.950,26 | 63.094,00 |
| 4 | - | 57,358,86 | 5.735,89 | 63.094,00 |



## Sistema de Amortização Francês

- Cálculo das prestações do t-ésimo período:

$$A_t = \frac{P}{a_{\overline{4}|10}} = \frac{200.000}{3{,}16987} = R\$\,63.094{,}00$$

- Cálculo dos juros do t-ésimo período:

$$J_t = i \times SD_{t-1}$$

$$\text{Por exemplo, para } t = 2:$$

$$J_2 = i \times SD_1 = 0{,}10 \times 156.908 = R\$\,15.690{,}60$$



## Sistema de Amortização Francês

- No exemplo anterior, se considerarmos um período de carência de 3 meses em que serão pagos unicamente os juros devidos, construir a planilha de amortização.
- Nos meses do período de carência apenas os juros são pagos. A primeira prestação é paga ao término da carência.



## Sistema de Amortização Francês

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t=SD_{t-1}$ - $Am_t$ | Amortização $Am_t=A_t$-$J_t$ | Juros $J_t$=i x $SD_{t-1}$ | Prestação $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | | |
| 1 | 200.000,00 | - | 20.000,00 | 20.000,00 |
| 2 | 200.000,00 | - | 20.000,00 | 20.000,00 |
| 3 | 156.906,00 | 43.094,00 | 20.000,00 | 63.094,00 |
| 4 | 109.502,60 | 47.403,40 | 15.690,60 | 63.094,00 |
| 5 | 57.358,86 | 52.143,74 | 10.950,26 | 63.094,00 |
| 6 | - | 57,358,86 | 5.735,89 | 63.094,00 |

## Sistema de Amortização Francês

- No exemplo anterior, considerando um período de carência de 3 meses em que os juros são capitalizados e incorporados ao principal, construir a planilha de amortização.
- Durante o período de carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Conseqüentemente, o cálculo das prestações deve ser realizado em base no financiamento inicial capitalizados por c – 1 meses, onde c representa o período de carência:

$$A_t = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{4}|10}} = \frac{200.000 \times (1{,}10)^2}{3{,}16987} = R\$\ 76.343{,}82$$



## Sistema de Amortização Francês

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t = SD_{t-1} - Am_t$ | Amortização $Am_t = A_t - J_t$ | Juros $J_t = i \times SD_{t-1}$ | Prestação $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 220.000,00 | - | - | - |
| 2 | 242.000,00 | - | - | - |
| 3 | 189.856,18 | 52.143,82 | 24.200,00 | 76.343,82 |
| 4 | 132.497,98 | 57.358,20 | 18.985,62 | 76.343,82 |
| 5 | 89.403,96 | 63.094,02 | 13.249,80 | 76.343,82 |
| 6 | - | 69.403,96 | 6.940,40 | 76.343,82 |



## Sistema “tabela” Price

- É um caso particular do Sistema Francês de Amortização, em que a taxa de juros é dada em termos nominais (geralmente anual) e as prestações tem período menor que aquele a que se refere a taxa de juros (em geral as amortizações são feitas em base mensal).



## Sistema “tabela” Price

- Um empréstimo de R$ 200.000,00 será pago em 3 prestações mensais iguais consecutivas. Se a taxa de juros nominal for de 180% a.a. com capitalização mensal, construir a tabela de amortização.

Taxa de juros efetiva ao mês:

$$i_m = \frac{i_a}{12} \Rightarrow i_m = 15\%\ a.m.$$

## Sistema de Amortização Francês

Cálculo das prestações :

$$A_t = \frac{P}{a_{\overline{3}|15}} = \frac{200.000}{2,28323} = R\$\,87.595,21$$

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t = SD_{t-1} - Am_t$ | Amortização $Am_t = A_t - J_t$ | Juros $J_t = i \times SD_{t-1}$ | Prestação $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 142.404,79 | 57.595,21 | 30.000,00 | 87.595,21 |
| 2 | 76.170,30 | 66.234,49 | 21.360,72 | 87.595,21 |
| 3 | - | 76.170,30 | 11.425,55 | 87.595,21 |



## Sistema de Amortização Francês

- Cálculo das variáveis em um período qualquer:
  - Muitas vezes é necessário o cálculo dos valores para algum determinado período qualquer, sem a necessidade de se elaborar a planilha completa.



## Sistema de Amortização Francês

- Saldo Devedor:
  - Supondo uma série de n prestações postecipadas, em um t-ésimo período qualquer o número de prestações ainda não pagas será igual a "n - t" . Desse modo, o saldo devedor no t-ésimo período será igual ao valor presente das prestações ainda devidas.



## Sistema de Amortização Francês

$$SD_t = A \times a_{\overline{n-t}|i} = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} \times a_{\overline{n-t}|i}$$

$$SD_t = P\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1}\right]$$

## Sistema de Amortização Francês

- Amortização
  - O valor da prestação em um t-ésimo período qualquer é igual à soma da amortização desse período mais os juros respectivos, calculados com base no saldo devedor do período anterior:



## Sistema de Amortização Francês

$$A = Am_t + i \times SD_t$$

$$\frac{P}{a_{\overline{n}|i}} = Am_t + i \times \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} \times a_{\overline{n-t}|i}$$

$$Am_t = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} - i \times \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} \times a_{\overline{n-t}|i} = P \times \frac{(1 - i \times a_{\overline{n-t}|i})}{a_{\overline{n}|i}}$$

$$Am_t = P\left[\frac{(1+i)^{t-1} \times i}{(1+i)^n - 1}\right]$$



## Sistema de Amortização Francês

- Juros

$$A = Am_t + J_t$$

$$\frac{P}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}} = P\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1}\right] + J_t$$

O que nos fornece:

$$J_t = P \times i \times \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}\right]$$



## Exemplo

- Um financiamento de R$ 50.000,00 foi contratado para ser pago em 48 prestações mensais pela tabela price, a juros nominais de 12% a.a., capitalizados mensalmente. Calcular o juro a ser pago no 25º mês e o saldo devedor e a amortização do 30º mês.

## Exemplo

Taxa de juros efetiva ao mês :

$$i_m = \frac{i_a}{12} \Rightarrow i_m = 1\%\ a.m.$$

Juro pago no 25° mês :

$$J_{25} = 50.000 \times 0{,}01 \times \left[ \frac{(1{,}01)^{48} - (1{,}01)^{24}}{(1{,}01)^{48} - 1} \right]$$

$$J_{25} = 50.000 \times 0{,}01 \times 0{,}55942 = R\$\ 279{,}71$$



## Exemplo

Saldo devedor no 30° mês:

$$SD_{30} = 50.000 \times \left[ \frac{(1{,}01)^{48} - (1{,}01)^{30}}{(1{,}01)^{48} - 1} \right]$$

$$SD_{30} = 50.000 \times 0{,}43183 = R\$\ 21.391{,}47$$

Amortização paga no 30° mês:

$$Am_{30} = 50.000 \times \left[ \frac{(1{,}01)^{29} \times 0{,}01}{(1{,}01)^{48} - 1} \right]$$

$$Am_{30} = 50.000 \times 0{,}021798 = R\$\ 1.089{,}88$$



## Sistema de Amortização Constante – SAC

- As prestações são decrescentes, as amortizações constantes e os juros decrescentes.
- Exemplo: Elaborar a planilha de amortização para o seguinte financiamento:
  - Valor do financiamento R$ 200.000,00
  - Reembolso em 4 meses pelo sistema SAC
  - Taxa de juros efetiva 10% a.m.



## Sistema de Amortização Constante – SAC

- Calculo das amortizações:

$$Am_t = \frac{\text{Financiamento}}{\text{n}} = \frac{200.000}{4} = R\$\ 50.000{,}00$$

## Sistema de Amortização Constante – SAC

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t=SD_{t-1}$ - $Am_t$ | Amortização $Am_t$ | Juros $J_t$=i x $SD_{t-1}$ | Prestação $A_t=Am_t+J_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 150.000,00 | 50.000,00 | 20.000,00 | 70.000,00 |
| 2 | 100.000,00 | 50.000,00 | 15.000,00 | 65.000,00 |
| 3 | 50.000,00 | 50.000,00 | 10.000,00 | 60.000,00 |
| 4 | - | 50.000,00 | 5.000,00 | 55.000,00 |



## Exemplo

- Um empréstimo de R$ 200.000,00, contratado a juros efetivos de 10% a.m, será pago em 3 prestações mensais com carência de 3 meses. Construir a planilha de amortização.
  - Durante a carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Logo a amortização deve ser calculada em base ao financiamento capitalizado por 2 meses (c-1 meses, onde c=3.)



## Exemplo

- Calculo das amortizações:

$$Am_t = \frac{P \times (1+i)^{t-1}}{3} = \frac{200.000 \times (1{,}1)^{3-1}}{3} = R\$\,80.666{,}67$$



## Sistema de Amortização Constante – SAC

| Mês(t) | Saldo Devedor $SD_t=SD_{t-1}$ - $Am_t$ | Amortização $Am_t$ | Juros $J_t$=i x $SD_{t-1}$ | Prestação $A_t=Am_t+J_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 220.000,00 | - | 20.000,00 | - |
| 2 | 242.000,00 | - | 22.000,00 | - |
| 3 | 161.333,33 | 80.666,67 | 24.200,00 | 104.866,67 |
| 4 | 80.666,67 | 80.666,67 | 16.133,33 | 96.800,00 |
| 5 | - | 80.666,67 | 8.066,67 | 88.733,33 |

## Sistema de Amortização Constante – SAC

- Cálculo das variáveis num período qualquer
  - Amortização: as quotas são constantes e calculadas dividindo o valor do principal inicial pelo número de períodos de pagamento: A=P/n
  - Saldo Devedor: o saldo devedor num período é igual ao principal inicial menos a soma das amortizações já pagas:

$$SD_t = P - t \times A = P - t \times \frac{P}{n}$$

$$SD_t = P\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$



## Sistema de Amortização Constante – SAC

- Juros: os juros em t são calculados sobre o saldo devedor em t -1.

$$J_t = i \times SD_{t-1} = i \times P\left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$$

$$J_t = i \times P\left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$$



## Exemplo

- Um financiamento de R$ 50.000,00 foi contratado a juros efetivos de 12% a.a. e será pago em 48 prestações mensais pelo SAC. Calcular o juro a ser pago no 25º mês, o saldo devedor e a amortização do 30º mês.
  - Taxa de juros efetiva ao mês:

$(1+i_a)=(1+i_m)^{12} \rightarrow 1{,}12=(1+i_m)^{12} \rightarrow i_m=0{,}0095$



## Exemplo

- Juro do 25º mês

$$J_t = i \times P\left(1 - \frac{t-1}{n}\right) = 0{,}0095 \times 50.000 \times \left(1 - \frac{25-1}{48}\right)$$

$$J_{25} = R\$\ 237{,}22$$

- Saldo devedor do 30º mês

$$SD_t = P\left(1 - \frac{t}{n}\right) = 50.000 \times \left(1 - \frac{30}{48}\right)$$

$$SD_{30} = R\$\ 18.750{,}00$$

## Exemplo

- Amortização do 30º mês

  $A = P/n = 50.000/48 = R\$\ 1.041,67$



## Sistema Misto ('Sacre')

- Se misturarmos os dois sistemas, Price e SAC, como fez recentemente o Sistema Financeiro da Habitação, teremos o sistema misto.
- Imagine que, no mesmo prazo e taxa de juros, metade da dívida seja paga pelo sistema Price e a outra metade pelo sistema SAC. Neste caso, as prestações serão decrescentes e iguais a:

$$A_k = A_{Price} + A_{k\ SAC}$$



## Sistema Misto ('Sacre')

- Ou seja, a prestação relativa à metade da dívida, paga pelo sistema Price será constante e igual a:

$$A_{Price} = 0,5 \ .\ P \ .\ i\ (1+i)^n / [\ (1+i)^n - 1\ )\ ]$$



## Sistema Misto ('Sacre')

- A outra metade será paga em prestações variáveis de: $A_{k\ SAC} = J_K + 0,5\ .\ P / n$ onde

  $J_K = i\ .\ S_{K-1}$

- Esse sistema pode ser generalizado de modo a dar mais 'peso' à parcela Price ou à parcela SAC.

## Sistema Misto ('Sacre')

- Colocando a equação para as prestações sob a forma:

$$A_k = (1 - q) \,.\, A_{\,Price} + q.A_{k\ SAC}$$



## Sistema Misto ('Sacre')

sendo que q (entre 0 e 1) representa o peso dado à parcela SAC, podemos calcular a razão de decréscimo das prestações a partir da primeira:

$$\mathbf{r = q\ .\ i\ .\ P\ /\ n}$$

ou seja, as prestações podem ser calculadas por:

$$A_k = A_{k-1} - r$$



## Sistema Misto ('Sacre')

- Como pode ser percebido, se q = 0, retornaremos ao sistema Price, se q = 1, teremos o sistema SAC e valores intermediárias definem o peso de cada sistema no processo de amortização da dívida.



## Sistema Misto ('Sacre')

A tabela abaixo mostra o plano de amortização pelo sistema Misto.

| Período | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | P |
| 1 | $A_1$ | $J_1 = i \times P$ | $p_1 = A_1 - J_1$ | $S_1 = P - p_1$ |
| 2 | $A_2 = A_1 - r$ | $J_2 = i \times S_1$ | $p_2 = A_2 - J_2$ | $S_2 = S_1 - p_2$ |
| 3 | $A_3 = A_2 - r$ | $J_3 = i \times S_2$ | $p_3 = A_3 - J_3$ | $S_3 = S_2 - p_3$ |
| k | $A_k = A_{k-1} - r$ | $J_k = i \times S_{k-1}$ | $p_k = A_k - J_3$ | $S_k = S_{k-1} - p_k$ |
| n | $A_n = A_{n-1} - r$ | $J_n = i \times S_{n-1}$ | $p_n = A_n - J_n$ | 0,00 |

## Sistema Americano de Amortização

- Neste sistema, os *juros são pagos a cada período* mas o *principal é pago numa única parcela ao final do prazo do financiamento.*
- O devedor deve constituir um fundo de amortização (denominado '*sinking fund*'), onde depositará a cada período as quotas de amortização, de modo que *ao final do prazo de financiamento, o saldo do fundo seja igual ao valor financiado.*



## Sistema Americano de Amortização

- Assim, a quota de amortização é dependente da taxa de juros paga pelo '*sinking fund*' e pode ser calculada pela expressão :

$$A = F \,.\, i_s / [(1 + i_s)^n - 1]$$

onde $i_s$ é a taxa paga pelo fundo e $F$ é o próprio valor financiado.



## Exemplo

*Um empréstimo de $200.000,00, para ser pago no prazo de 4 meses, à taxa de 1% a.m..*

| *N* | *Saldo Devedor* | *Amortização* | *Juros* | *Prestação* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 200.000,00 | - | - | - |
| 1 | 200.000,00 | - | 2.000,00 | 2.000,00 |
| 2 | 200.000,00 | - | 2.000,00 | 2.000,00 |
| 3 | 200.000,00 | - | 2.000,00 | 2.000,00 |
| 4 | - | 200.000,00 | 2.000,00 | 202.000,00 |
| | *Total* | 200.000,00 | 8.000,00 | 208.000,00 |