

# Administração

**MATEMÁTICA FINANCEIRA**  
**Por: EDÉZIO SACRAMENTO**  
edezio@oi.com.br

## Séries de Pagamentos

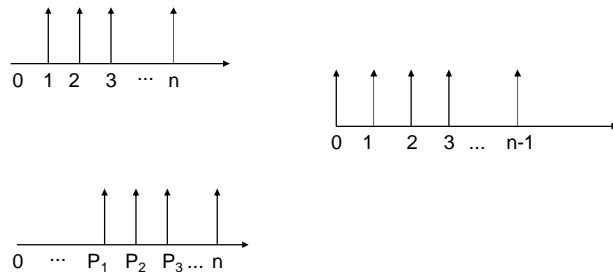
- Muitas vezes os compromissos financeiros são saldados através de pagamentos periódicos ao invés de em um único pagamento, daí a oportunidade de tratá-los segundo uma formatação matemática específica.

### Série Uniforme

- Dizemos que uma série de pagamentos ou recebimentos é uniforme quando constituída de *pagamentos periódicos iguais*. Os vencimentos dos termos de uma serie uniforme podem ocorrer no *final de cada período (termos postecipados)*, no *início (termos antecipados)*, ou ao *término de um período de carência (termos diferidos)*.

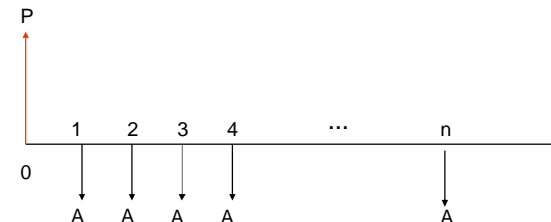
## Série Uniforme

Veja seus diagramas de fluxos:



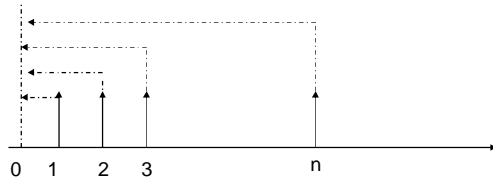
## Série Uniforme

- Deve ser observado que os pagamentos periódicos A (PMT na HP-12C), ao final do enésimo período devem saldar o compromisso inicial P além dos juros, correspondendo portanto a juros mais amortização do principal.



## Valor Presente de Séries Uniformes

- O valor presente de uma série uniforme postecipada corresponde à soma dos valores atuais da série.



Prof. Edézio

5

## Valor Presente de Séries Uniformes

- O valor presente C dos termos da série é:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A}{(1+i)^n} \\
 &= A \left[ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \\
 &\quad \text{somatório dos termos de uma P.G. de razão } 1/(1+i)
 \end{aligned}$$

A soma dos termos pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Prof. Edézio

6

## Valor Presente de Séries Uniformes

- Assim obtemos:

$$P = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} = A \cdot a_{\overline{n}|i}$$

- O fator  $a_{\overline{n}|i}$  é denominado **fator de valor presente** (ou atual) de uma série uniforme e pode ser encontrado em tabelas financeiras.

Prof. Edézio

7

## Exemplo

13. Uma dívida de R\$ 4.000,00 será paga em 8 prestações mensais iguais, pagas ao final de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% a.m., calcular o valor das prestações.

Dados:  $P = \text{R\$ } 4.000,00$ ,  $i = 5\% \text{ a.m.}$ ,  $n = 8$ ,  $A = ?$

$$P = A \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow A = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{4.000}{\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \cdot 0,05}}$$

$$A = \frac{4.000}{6,46321} = \text{R\$ } 618,89$$

Prof. Edézio

8

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 4.000(CHS) (PV) → principal com sinal negativo
- 5(i) → taxa de juros efetiva
- 8(n) → número de prestações
- (PMT) → 618,89 calcula o valor das prestações
  
- **Obs.:** a calculadora deve ser colocada no modo postecipado (g)(END).

## Exemplo

14. No exemplo anterior, se no ato da compra for paga uma entrada de 20% sobre o valor à vista, calcular o valor das prestações.

Dados :P = R\$ 4.000,00, i = 5% a.m., n = 8,  
Entrada (E)= R\$ 800,00, A = ?

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo

## Exemplo

$$P - E = A \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow A = \frac{P - E}{a_{\overline{8}|5}} = \frac{4.000 - 800}{\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \cdot 0,05}}$$

$$A = \frac{3.200}{6,46321} = R\$ 495,11$$

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 3.200(CHS) (PV) → principal com sinal negativo
- 5(i) → taxa de juros efetiva
- 8(n) → número de prestações
- (PMT) → 495,11 calcula o valor das prestações

## Exemplo

15. No exemplo 13, se no ato da compra for paga uma entrada de 20% juntamente com a primeira prestação (prestações antecipadas), calcular o valor das prestações.

Dados :  $P = R\$ 4.000,00$ ,  $i = 5\%$  a.m.,  $n = 8$ ,  
Entrada (E) =  $R\$ 800,00$ ,  $A = ?$

As prestações são calculadas com base no financiamento efetivo

## Exemplo

$$P - E - A = A \cdot a_{\overline{n-1}|i} \Rightarrow A = \frac{P - E - A}{a_{\overline{7}|5}} = \frac{4.000 - 800 - A}{\frac{(1,05)^7 - 1}{(1,05)^7 \cdot 0,05}}$$

$$A = \frac{3.200 - A}{5,78637} \Rightarrow A = R\$ 471,53$$

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 3.200(CHS) (PV) → principal com sinal negativo
- 5(i) → taxa de juros efetiva
- 8(n) → número de prestações
- (g)(BEG)(PMT) → 471,53 calcula o valor das prestações antecipadas

## Exemplo

16. Uma pessoa recebeu  $R\$ 7.500,00$  pelo seu carro usado na compra de um novo, cujo valor à vista é de  $R\$ 18.500,00$ . O saldo será pago por meio de uma determinada entrada, mais 18 prestações mensais de  $R\$ 350,00$ . Sendo aplicados juros nominais de 72% a.a. capitalizados mensalmente, calcular o valor da entrada.

## Exemplo

- Dados:  $C = R\$ 18.500,00$ ,  $A = R\$ 350,00$   $n = 18$ ,  $j = 72\% \text{ a.a.}$ ,  $E = ?$
- Taxa de juros efetiva ao mês:  $i_m = 72/12 \% = 6\% \text{ a.m.}$
- Financiamento efetivo  $= 18.500 - 7.500 - E$

## Exemplo

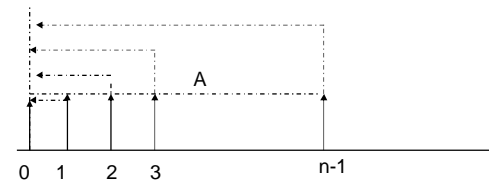
$$\text{Fin.Efetivo} = A \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 350 = \frac{18.500 - 7.500 - E}{a_{\overline{18}|6\%}} = \frac{11.000 - E}{\frac{(1,06)^{18} - 1}{0,06}}$$
$$350 = \frac{11.000 - E}{1082760} \Rightarrow E = R\$ 7.210,34$$

## Na HP - 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 350(g)(END)(PMT) → prestação postecipada
- 72(g)(12÷) → taxa de juros nominal capitalizada mensalmente
- 18(n) → número de prestações
- (PV)11.000(+) → 7.210,34 calcula o principal, e ao resultado soma 11.000

## Valor Atual de Séries Antecipadas

- O valor presente de uma série uniforme antecipada corresponde à soma dos valores atuais dos  $n$  pagamentos da série.



## Valor Atual de Séries Antecipadas

- O valor presente P dos termos da série é:

$$\begin{aligned} P &= A + \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} \\ &= A \left[ 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

somatório dos termos de uma P.G. de razão  $1/(1+i)$

A soma dos termos pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

## Valor Atual de Séries Antecipadas

- Assim obtemos:

$$P = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \cdot i} = A \cdot \bar{a}_{n|i}$$

- Os valores  $\bar{a}_{n|i}$  não são encontrados em tabelas financeiras porque podem ser obtidos em função de  $a_{n|i}$ .

## Valor Atual de Séries Antecipadas

- Vamos obter essa relação usando a fórmula do valor presente de uma série postecipada. Temos que:

$$P = A + A \cdot a_{n-1|i} = A(1 + a_{n-1|i})$$

- Assim:

$$A \cdot \bar{a}_{n|i} = A(1 + a_{n-1|i}) \Rightarrow \bar{a}_{n|i} = 1 + a_{n-1|i}$$

## Exemplo

17. Calcular o valor atual de uma renda mensal antecipada, de 10 termos de R\$ 5.000,00 cada, à uma taxa de 3% a.m.

Dados:  $n = 10$ ,  $A = \text{R\$ } 5.000,00$ ,  $i = 3\% \text{ a.m.}$ ,  $P = ?$

$$P = 5.000 \times \bar{a}_{10|3} = 5.000 \times \frac{(1 + 0,03)^{10} - 1}{(1 + 0,03)^{10-1} \cdot 0,03}$$

$$P = 5.000 \times 8,786109 = \text{R\$ } 43.930,55$$

## Exemplo

- Uma outra solução seria:

$$P = A \cdot \bar{a}_{\overline{n}|i} = 5.000 \times \bar{a}_{\overline{10}|3} = 5.000 \times (1 + a_{\overline{9}|3})$$

$$P = 5.000 \times (1 + 7,786109) = R\$ 43.930,55$$

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 5.000(g)(BEG)(CHS)(PMT) → depósito antecipado com sinal negativo
- 10(n) 3(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (PV) → 43.930,55 calcula o montante

## Exemplo

18. Qual a prestação mensal antecipada capaz de amortizar, com 12 pagamentos, um financiamento de R\$ 10.000,00 com juros de 3% a.m.?

Dados:  $n=12$ ,  $P=R\$ 10.000,00$ ,  $i = 3\%$  a.m.,  $A = ?$

$$A = \frac{P}{\bar{a}_{\overline{n}|i}} = \frac{10.000}{\bar{a}_{\overline{12}|3}} = \frac{10.000}{1 + a_{\overline{11}|3}} = \frac{10.000}{10,252624}$$

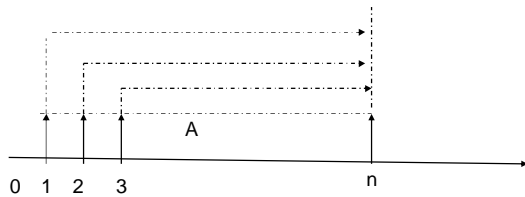
$$A = R\$ 975,36$$

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 10.000(g)(BEG)(CHS)(PV) → valor principal com sinal negativo
- 12(n) 3(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (PMT) → 975,36 calcula as prestações

## Valor Futuro de Séries Uniformes

- O valor futuro de uma série uniforme de pagamentos  $A$  pode ser deduzido de maneira análoga através da soma do valor futuro de cada parcela na data  $n$ .



Prof. Edézio

29

## Valor Futuro de Séries Uniformes

$$\begin{aligned} F &= A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-1} \\ &= A \underbrace{[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}]}_{\text{soma dos termos de uma P.G. de razão } (1+i)} \end{aligned}$$

Assim obtemos :

$$F = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A \cdot s_{\overline{n}|i}$$

Prof. Edézio

30

## Valor Futuro de Séries Uniformes

- O fator  $s_{\overline{n}|i}$  é denominado **fator de valor futuro** (ou capitalização) de uma série uniforme e pode ser encontrado em tabelas financeiras.

Prof. Edézio

31

## Exemplo

19. Quanto uma pessoa acumularia no fim de 15 meses se depositasse todo final de mês R\$ 350,00 em uma aplicação que paga juros efetivos de 5% a.m? Dados:  $n = 15$ ,  $A = \text{R\$ } 350,00$ ,  $i = 5\% \text{ a.m.}$ ,  $F = ?$

$$\begin{aligned} F &= A \cdot s_{\overline{n}|i} = 350 \times s_{\overline{15}|5} = 350 \times \frac{(1+0,05)^{15} - 1}{0,05} \\ F &= 350 \times 21,57856 = \text{R\$ } 7.552,50 \end{aligned}$$

Prof. Edézio

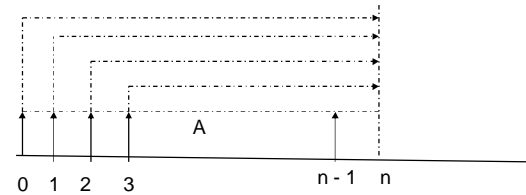
32

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 350(g)(END)(CHS)(PMT) → depósito postecipado com sinal negativo
- 15(n) 5(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (FV) → 7.552,50 calcula o montante

## Montante de Séries Antecipadas

- O valor futuro de uma série uniforme de pagamentos antecipados A, pode ser deduzido de maneira análoga através da soma do valor futuro de cada parcela na data n.



## Valor Futuro de Séries Uniformes

$$\begin{aligned}
 F &= A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i)^2 + A(1+i) \\
 &= A(1+i) \underbrace{[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1]}_{\text{soma dos termos de uma P.G. de razão } (1+i)}
 \end{aligned}$$

Assim obtemos :

$$F = A(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A \cdot \bar{s}_{n|i}$$

## Valor Futuro de Séries Uniformes

- Os valores  $\bar{s}_{n|i}$  não são encontrados em tabelas financeiras porque podem ser obtidos em função de  $s_{n|i}$ .  
Através da fórmula:

$$\begin{aligned}
 A \cdot \bar{s}_{n|i} &= A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i) \\
 A \cdot \bar{s}_{n|i} + A &= A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i) + A
 \end{aligned}$$

somando A aos dois membros da igualdade

O segundo membro é o montante de uma série postecipada de n + 1 termos, portanto temos :

$$A \cdot (\bar{s}_{n|i} + 1) = A \cdot s_{n+1|i} \Rightarrow \bar{s}_{n|i} = s_{n+1|i} - 1$$

## Exemplo

20. Quanto devo depositar em um Banco, a 9% a.s., no início de cada semestre, para possuir o montante de R\$ 50.000,00 no fim de 3 anos?

Dados:  $i = 9\%$  a.s.,  $F = R\$ 50.000,00$ ,  $n = 6$  semestres,  $A = ?$

$$A = \frac{F}{\overline{s}_{\overline{n}|i}} = \frac{50.000}{\overline{s}_{\overline{6}|9}} = \frac{50.000}{s_{\overline{7}|9} - 1} = \frac{50.000}{8,200434}$$

$$A = R\$ 6.097,23$$

## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 50.000 (CHS)(FV) → montante com sinal negativo
- 6(n) 9(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (g)(BEG)(PMT) → 6.097,23 calcula o valor das prestações antecipadas

## Exemplo

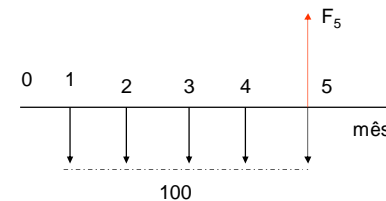
20. Calcular o capital formado até o fim do quinto mês, mediante cinco aplicações mensais de R\$ 100,00. Suponha que os depósitos são realizados:

- No fim de cada mês;
- No começo de cada mês.  
os juros são calculados à razão de 10% a.m.

## Exemplo

- Dados:  $A = R\$ 100,00$ ,  $n = 5$ ,  $i = 10\%$ ,  $F_5 = ?$

$$(a) F = A \cdot s_{\overline{5}|10} = 100 \times \frac{(1,10)^5 - 1}{0,1} = R\$ 610,51$$



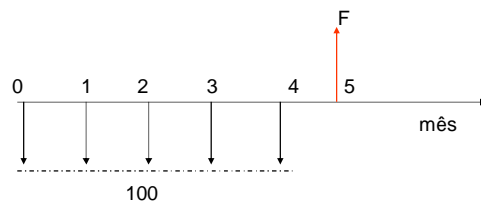
## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 100(g)(END)(CHS)(PMT) → depósito postecipado com sinal negativo
- 5(n) 10(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (FV) → 610,51 calcula o montante

## Exemplo

$$(b) F = A \cdot \bar{s}_{\overline{n}|i} = 100 \cdot \bar{s}_{\overline{5}|10} = 100(s_{\overline{5}|10} - 1)$$
$$F = 100 \times 6,715610 = R\$ 671,56$$

## Exemplo



## Na HP-12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 100(g)(BEG)(CHS)(PMT) → depósito antecipado com sinal negativo
- 5(n) 10(i) → número de depósitos e taxa de juros efetivos
- (FV) → 671,56 calcula o montante

## Cálculo da Taxa de Juros

- Esse cálculo não é tão simples, precisamos de métodos de aproximações. Por isso usaremos apenas a HP - 12C.

## Cálculo da Taxa de Juros

- Qual a taxa de juros cobrada na venda, em 12 prestações de R\$ 300,00, de uma Brastemp cujo preço à vista é de R\$ 2.044,11 ?

Observe que a solução matemática é complicada:

$$[(1+i)^{12} - 1] / [i \cdot (1+i)^{12}] = 2.044,11 / 300,00$$

## Cálculo da Taxa de Juros

- Uma forma prática é 'chutar' valores de  $i$  até que a igualdade se verifique, outra é procurar nas tabelas o fator de valor atual que mais se aproxima, outra mais trabalhosa é usar Newton-Raphson
- Esse cálculo não é tão simples, precisamos de métodos de aproximações mais simples.

## Cálculo da Taxa de Juros

- Sugiro usar a seguinte equação:

$$i = B \cdot [12 - (n - 1) \cdot B] / [12 - 2 \cdot (n - 1) \cdot B]$$

onde:  $B = (n \cdot A / P)^{2 / (n+1)} - 1$

É o método de Baily-Lenzi, que dá boa aproximação quando  $n \cdot i < 3$ .

- Por isso usaremos apenas a HP - 12C.

## Exemplo

21. Um carro é vendido por R\$ 20.000,00 a vista, ou em 12 prestações mensais de R\$ 1.949,74. Qual é a taxa de juro mensal que está sendo cobrada?

Dados:  $P = \text{R\$ } 20.000,00$ ,  $A = \text{R\$ } 1.949,74$ ,  
 $n = 12$ ,  $i = ?$

## Exemplo

$$P = A \cdot a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 20.000 = 1.949,74 \times a_{\overline{12}|i}$$

$$a_{\overline{12}|i} = \frac{20.000}{1.949,74} = 10,257778$$

Procurando numa tabela encontramos 2,5%.

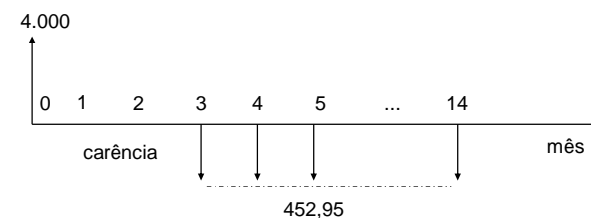
Usando a HP-12C obtemos:

## Na HP-12C

- **(f) (FIN)** → apaga a memória financeira
- **20.000(PV)** → entra com o valor do financiamento
- **1.949,74(CHS)(PMT)** → prestações com sinal negativo
- **12(n)** → número de prestações
- **(i)** → 2,5 calcula a taxa efetiva

## Exemplo

22. Um empréstimo de R\$ 4.000,00 será liquidado em 14 parcelas mensais de R\$ 452,95 com um período de carência de 3 meses para início dos pagamentos. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.



## Exemplo

- (f) (REG) → apaga a memória financeira
- 4.000(g)(CFo) → fluxo do mês zero
- 0(g)(CFj) → fluxo do 1º mês
- 0(g)(CFj) → fluxo do 2º mês
- 452,95(CHs)(g)(CFj) → fluxo do 3º mês
- 12(g)(Nj) → 12 fluxos iguais ao do 3º mês
- (f)(IRR) → 5,06% calcula a taxa de juros efetiva

## Série Uniforme Perpétua

- Quando o número de períodos de uma série uniforme é muito grande, como no caso de aposentadorias, é razoável considerá-la infinita. Nesses casos, a relação entre o valor presente e as prestações pode ser obtida pela expressão:

$$P = A \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[(1+i)^n - 1]}{i \cdot (1+i)^n} \right\}$$

ou:

$$P = A / i$$

Pode ser observado que as prestações correspondem apenas aos juros sobre o principal, como se a dívida não fosse nunca amortizada.

## Série Uniforme Perpétua

- Como a duração é ilimitada. Só tem sentido calcular-se o valor presente uma vez que o montante pode ser infinito.
- Essa fórmula pode ser utilizada para se fazer uma avaliação rápida de imóveis, para tanto é necessária a hipótese de que o imóvel tenha um horizonte de aproveitamento infinito e que renda um aluguel constante.
- Nestas condições, o valor do imóvel pode ser entendido como sendo o valor presente da soma dos aluguéis descontados, desconto esse à taxa de juros  $i$  que representa o ganho que o possuidor do imóvel teria se aplicasse seu dinheiro a juros compostos no mercado financeiro.

## Exemplo

- Se um apartamento está rendendo um aluguel de R\$ 500,00 por mês e se a taxa da melhor aplicação no mercado financeiro é de 1% a.m., qual seria uma primeira estimativa do valor do imóvel?

Admitindo-se as hipóteses de duração ilimitada do apartamento e de ser o aluguel constante, tem-se:

$$P = A/i = 500/0,01 = \text{R\$ } 50.000,00$$

Ou seja, numa primeira aproximação, o imóvel seria avaliado em R\$ 50.000,00

## Exemplo

Os custos operacionais de certa usina hidrelétrica, cuja vida útil prevista é de 50 anos, são estimados em R\$ 60.000,00/mês. Admitida uma taxa de juros de 12% a.a., qual o valor presente desses custos ?

A taxa mensal equivalente a 12% a.a. é de:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + 0,12)$$

logo:  $i_m = 0,9489\%$  a.m.

Admitindo que a série seja suficientemente extensa (600 períodos de juros), o valor presente procurado será:

$$P = A / i = 60.000,00 / 0,009489 = R\$ 6.323.110,97$$

## Exemplo

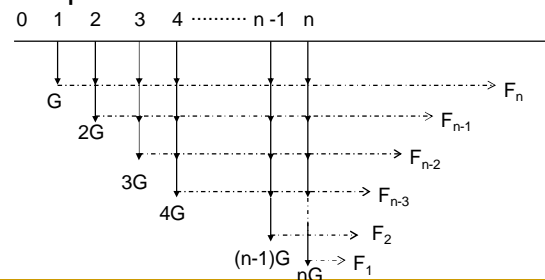
Se tivéssemos optado pela equação exata, encontraríamos R\$ 6.301.234,55, uma diferença inferior a  $3,46 \times 10^{-5} \%$ .

## Série Gradiente

- São comuns situações em que as projeções dos fluxos de caixa das aplicações financeiras ou dos projetos de investimento são crescentes ou decrescentes. As séries em progressão aritmética são denominadas de séries gradiente.

## Série Gradiente

- Considere uma série crescente com gradiente uniforme com  $n$  termos postecipados.



## Série Gradiente – Valor Futuro

- Esta série pode ser decomposta em n séries uniformes com termos iguais a G, onde  $F_1$  representa o montante de uma série com um único termo igual a G,  $F_2$  é o montante da série com 2 termos iguais a G, ...,  $F_n$  é o montante de uma série de n termos. Logo o montante da série gradiente será:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_n$$

## Série Gradiente – Valor Futuro

$$F = G \frac{(1+i)^1 - 1}{i} + G \frac{(1+i)^2 - 1}{i} + G \frac{(1+i)^3 - 1}{i} + G \frac{(1+i)^3 - 1}{i} + \dots + G \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$F = \frac{G}{i} \left\{ (1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + \dots + (1+i)^n \right\} - n$$

A expressão entre colchetes representa a soma dos termos de uma P.G. de n termos com primeiro termo e razão iguais a  $(1+i)$ .

$$F = \frac{G}{i} \left\{ \frac{(1+i) \times ((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} - n \right\}$$

$$F = \frac{G}{i} \left\{ (1+i) \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\} = \frac{G}{i} \left\{ (1+i) \times s_{\overline{n}|i} - n \right\}$$

## Série Gradiente – Valor Presente

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{G}{i} \frac{\left\{ (1+i) \times s_{\overline{n}|i} - n \right\}}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{G}{i} \left\{ (1+i) \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] - \frac{n}{(1+i)^n} \right\}$$

$$P = \frac{G}{i} \left\{ (1+i) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right\}$$

## Exemplo

- Uma máquina permite uma economia de custos de R\$ 10.000 no primeiro ano e gradativamente crescente até o 5º ano de sua vida útil. Considerando uma taxa de juros efetiva de 12% a.a., calcular o valor atual dessa economia de custos.

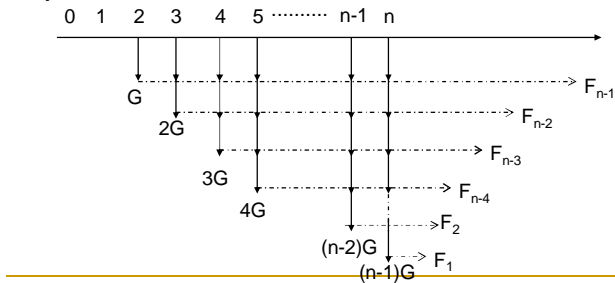
Dados:  $G = \text{R\$ } 10.000$ ,  $i = 12\%$  a.a.,  $n = 5$  anos,  $P = ?$

$$P = \frac{G}{i} \left[ (1+i) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] = \frac{10.000}{0,12} \left[ 1,12 \times a_{\overline{5}|12} - \frac{5}{(1,12)^5} \right]$$

$$P = \text{R\$ } 100,02$$

## Série Gradiente – Fluxo Diferido

- Considere uma série gradiente uniforme crescente com  $n-1$  termos diferidos num período.



Prof. Edézio

65

## Série Gradiente – Fluxo Diferido Valor Futuro

- Esta série pode ser decomposta em  $n-1$  séries uniformes com termos iguais a  $G$ .

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1}$$

$$F = G \frac{(1+i)^{-1} - 1}{i} + G \frac{(1+i)^{-2} - 1}{i} + G \frac{(1+i)^{-3} - 1}{i} + G \frac{(1+i)^{-4} - 1}{i} + \dots + G \frac{(1+i)^{-(n-1)} - 1}{i}$$

$$F = \frac{G}{i} \left\{ [(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + (1+i)^4 + \dots + (1+i)^n] + (1-n) \right\}$$

A expressão entre colchetes representa a soma dos termos de uma P.G. de  $n-1$  termos com primeiro termo e razão iguais a  $(1+i)$ .

$$F = \frac{G}{i} \left\{ \frac{(1+i) \times [(1+i)^{n-1} - 1]}{(1+i) - 1} + (1-n) \right\}$$

$$F = \frac{G}{i} \left\{ \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\} = \frac{G}{i} \left\{ s_{\overline{n}|i} - n \right\}$$

Prof. Edézio

66

## Série Gradiente – Fluxo Diferido Valor Presente

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{G}{i} \left\{ \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\}$$

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \right\}$$

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[ s_{\overline{n}|i} - n \right]$$

Prof. Edézio

67

## Exemplo

- Quanto devemos aplicar hoje. A uma taxa de juros efetiva de 6% a.m., de modo a nos possibilitar 5 saques consecutivos. O primeiro de R\$ 20.000 daqui a 2 meses, e os outros gradativamente crescentes, formando uma série gradiente uniforme igual a R\$ 20.000, R\$ 40.000, R\$ 60.000, R\$ 80.000 e R\$ 100.000?

Dados:  $G = \text{R\$ } 20.000$ ,  $i = 6\% \text{ a.m.}$ ,  $n = 6$  meses,  $P = ?$

Prof. Edézio

68

## Exemplo

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} [s_{\bar{n}|i} - n] = \left( \frac{20.000}{0,06 \times (1,06)^6} \right) \times (s_{\bar{6}|6} - 6)$$

$$P = \left( \frac{20.000}{0,06 \times 1,41852} \right) \times (6,97532 - 6) = \text{R\$}229.187,23$$