Administração

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Por: EDÉZIO SACRAMENTO
edezio@oi.com.br

Ementa do Curso

- Introdução
- Regime de Capitalização
- Séries de Pagamentos
- Sistemas de Amortização
- Métodos de Análise de Investimento.
- A Matemática Financeira e a Inflação.

Bibliografia

- Samanez, Carlos Patricio - Matemática Financeira – Editora Prentice Hall - 3 ª Edição
- Puccini , Aberlado Lima - Matemática Financeira - Editora Saraiva , 6 ª Edição
- Zentgraf, Roberto - Matemática Financeira Objetiva – Editoração Editora Ltda

Introdução

- A matemática financeira tem como objetivo básico estudar a evolução do valor do dinheiro no tempo.
- Para fazer um estudo econômico adequado alguns princípios básicos devem ser considerados, sendo os seguintes:

Introdução

- Devem haver alternativas de investimentos.
- As alternativas devem ser expressas em dinheiro.
- Só as diferenças entre as alternativas são relevantes.
- Sempre serão considerados os juros sobre o capital empregado.
- Nos estudos econômicos o passado geralmente não é considerado; interessa-nos o presente e o futuro. A afirmação: ***"não posso vender este carro por menos de R$10000 porque gastei isto com ele em oficina"*** não faz sentido, o que normalmente interessa é o valor de mercado do carro.

Introdução

- ***"NÃO SE SOMA OU SUBTRAI QUANTIAS EM DINHEIRO QUE NÃO ESTEJAM NA MESMA DATA"***
- A maioria das pessoas esquecem ou ignoram esta premissa.
- Por exemplo, uma TV que à vista é vendida por R$500,00 ou em 6 prestações de R$100,00, acrescenta-se a seguinte informação ou desinformação: total a prazo R$600,00. O que se verifica que soma-se os valores em datas diferentes, desrespeitando o princípio básico, citado acima, e induzindo a se calcular juros de forma errada.

Definições e Terminologias

- Capital ou Valor Presente (P): é a quantidade monetária envolvida em uma transação, referenciada geralmente na data focal zero (na HP -12C utiliza PV, de Present Value).
- Juros (J): é a remuneração exigida na utilização de capital de terceiros.
- Prazo ou Número de Períodos (n): dias, meses, bimestres,..., anos (na HP -12C utiliza também n).

Definições e Terminologias

- **Taxa de Juro** (i): é o coeficiente obtido pela relação estabelecida entre o valor do juro de um período e o capital emprestado, podendo ser expressa sob a forma percentual ou fracionária, a *taxa de juros deve sempre se referir à mesma unidade de tempo expressa pelo período financeiro* (na HP – 12C utiliza i, do inglês *interest*, que significa juro).
- **Montante ou Valor Futuro** (F): é a quantidade monetária resultante de uma transação financeira, sendo, portanto, referenciada em uma data futura (na HP – 12C utiliza FV, de *Future Value*).

Diagrama de Fluxo

Os problemas financeiros dependem basicamente do fluxo (entrada e saída) de dinheiro no tempo.

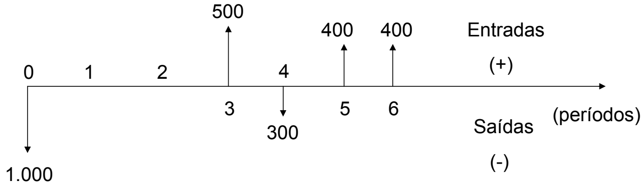


Diagrama de Fluxo

- **Convenção de Fim de Período**
- Como mostrado no diagrama de fluxo de caixa, a data zero '0' normalmente marca o início de um projeto e os períodos de tempo (1, 2, 3, etc.) são referidos a ela.
- Assumiremos que todos os pagamentos ocorrem nos fins de período.
- Em geral admite-se que os fluxos de caixa referentes às despesas ocorram no início de cada período a que se referem os juros e os fluxos de caixa referentes aos recebimentos ocorram ao final de cada período a que se referem os juros.

Juros

- Os juros é o que se paga pelo custo do capital, ou seja, é o pagamento pela oportunidade de poder dispor de um capital durante determinado tempo.
- Os juros pode ser definido como sendo a diferença entre o montante a ser pago ao final do prazo pactuado (‘*valor futuro*’) e o montante recebido em empréstimo ('*capital ou principal*'). São expressos, portanto, em moeda corrente:

$$J = F - P$$

Juros

- A propósito estamos muito acostumados com "juros", lembrem dos seguintes casos:
  1. compras à crédito;
  2. cheques especiais;
  3. prestação da casa própria;
  4. desconto de duplicata;
  5. vendas à prazo;
  6. financiamentos de automóveis;
  7. empréstimos.

Taxa de Juros

- O tempo transcorrido até que os Juros *J* sejam recebidos é explicitado na taxa de juros. Essa taxa é definida como sendo a relação entre os juros recebidos e o capital aplicado (valor presente):

$$i = J / P$$

Taxa de Juros

- Em geral, essa relação é multiplicada por 100 e a taxa de juros expressa em [*% por unidade de tempo*].
- Assim, se tomarmos emprestados R$ 200,00 (P) e, ao fim de um mês, restituirmos ao emprestador a quantia de R$ 210,00 (F), os juros (J) corresponderão a : 210 -200 =R$ 10,00 e a taxa de juros (i) corresponderá a: 10/200 = 0,5 ou 0,5 x 100 = 5 % ao mês.

Taxa de Juros

- Se a taxa de juros é dada em % ao mês, o período é mensal
- se a taxa é dada em % ao ano, o período é anual
- E assim sucessivamente
- Taxa de juros sempre tem que estar associada ao tempo

Regime de Capitalização

- O regime será de ***capitalização simples*** quando, para o capital inicial, o juro produzido em vários períodos for constante em cada período, ou seja, em cada período o juro incide apenas sobre o capital inicial. É o chamado juro simples.
- O regime será de ***capitalização composta*** se, ao fim de cada período, o juro produzido nesse período for somado ao capital que o produziu e passarem os dois, capital mais juro, a render juros no período seguinte. É o chamado juro sobre juro ou juro composto.
- O regime será de ***capitalização contínua*** , algo raro,se as receitas ou desembolsos são distribuídos ao longo do período, ao invés de concentrados numa única data. Por exemplo, períodos de alta inflação.

Juro Exato e Juro Comercial

- Quando falamos de juro exato, estamos nos referindo ao cálculo efetuado observando-se o número de dias do calendário. Por outro lado, quando falamos em juro comercial, estamos nos referindo à praxe de mercado que considera 30 dias em um mês e 360 dias no ano.

Regime de Capitalização Simples

Ao se calcular rendimentos utilizando o conceito de ***juros simples***, tem-se que apenas o principal ou valor presente, ou seja o capital inicial, rende juros. O valor destes juros pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$J = P \cdot i \cdot n$$

onde:

P = valor presente

J = juros

i = taxa de juros

n = número de períodos

Exemplo

1. Calcular o juro produzido por R$ 4000,00 à taxa de 2% a. m. durante 3 meses.

   Dados: P = R$ 4000,00, i=2% a. m. e n = 3 meses, J = ?

   J=P . i . n = 4000 . 0,02 . 3 = R$ 240,00.

   Obs.: As unidades de tempo da taxa de juros e do prazo da aplicação devem ser iguais.

Juros Simples

O valor que se tem depois do período de capitalização, chamado de valor futuro (**F**), ou montante, pode ser calculado por:

$$F = P + J$$

$$F = P + P \cdot i \cdot n$$

$$F = P(1 + i \cdot n)$$

A fórmula acima é pouco utilizada, porque na maioria dos cálculos em matemática financeira usa-se juros compostos.

Exemplo

1. Calcular os juros e o montante devidos relativos a uma aplicação de R$ 10.000,00 pelo prazo de 8 meses à taxa simples de 4% ao mês.

   Dados: P = R$ 10.000,00, n = 8 meses, i = 4% a.m., J = ?, F = ?

   J = P . i . n = 10.000,00 x 0,04 x 8

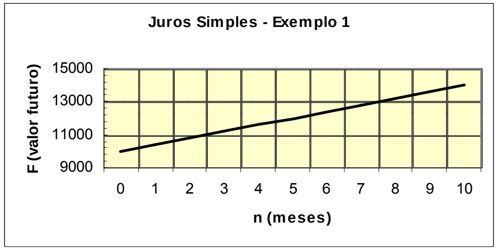
   J = R$ 3.200,00

   F = P + J = 10.000,00 + 3.200,00

   F = R$ 13.200,00

Exemplo

- O valor futuro F calculado para diversos valores de n é mostrado na figura abaixo e tem a trajetória de uma reta com origem em P (valor presente) e inclinação i x P.



Exemplo

2. Qual é o montante de um capital de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de 10% a.a. pelo prazo de 2 anos?

   Dados: P = R$ 1.000,00 , i = 10% a.a. , n = 2 anos, F = ?

   F = P (1 + i . n) = 1000 (1 + 0,1 x 2)

   = 1000 x 1,2 = R$ 1.200,00

Taxas Proporcionais

- Considerando-se duas taxas de juros arbitrárias i_1 e i_2 , relacionadas respectivamente aos períodos n_1 e n_2 , referidos à unidade comum de tempo das taxas. Estas taxas se dizem *proporcionais* se houver uma proporção entre as taxas e seus respectivos períodos, ou seja, se

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow i_1 \cdot n_2 = i_2 \cdot n_1$$

Exemplo

3. Verificar se as taxas 5% a.t. e de 20% a.a. são proporcionais.

   Dados: i_1 = 5% a.t., i_2 = 20% a.a.,

   n_1 = 1 trimestre = 3 meses

   n_2 = 1 ano = 12 meses

   Como

$$\frac{5}{20} = \frac{3}{12} \quad \text{pois} \quad 5 \times 12 = 20 \times 3$$

   as taxas dadas são proporcionais.

Taxas Equivalentes

- Duas taxas se dizem equivalentes se, aplicado um mesmo capital às duas taxas e pelo mesmo intervalo de tempo, ambas produzirem o mesmo juro.

  Exemplo: Seja um capital de R$ 10.000,00, que pode ser aplicado alternativamente à taxa de 5% a.t. ou de 20% a.a. Supondo um prazo de 1 ano calcular os juros produzidos por cada taxa.

  Aplicando o capital à taxa de 5% a.t pelo prazo de 1 ano = 4 trimestres, teremos o juro de:

  J_1 =10.000 x 0,05 x 4= R$ 2.000,00

  Aplicando o mesmo capital à taxa de 20% a.a., por 1 ano, teremos um juro igual a:

  J_2 = 10.000 x 0,2 x1 = R$ 2.000,00

Taxas Equivalentes

- Concluímos que a taxa de 5% a.t. é equivalente à taxa de 20% a.a.
- No regime de juros simples é indiferente falar-se que duas taxas de juros são proporcionais ou que são equivalentes.
- Portanto 12% a.a. é equivalente a 6% a.s. que é equivalente 2% a.b. que é equivalente a 1% a.m.

Exemplo

4. Calcular os juros obtidos por um capital de R$ 12.000,00 aplicado durante 8 meses e 3 dias à taxa de juros simples de 40% a.a. Efetuar os cálculos considerando ano comercial (360 dias) e ano exato (365 dias).

   Dados: P = R$ 12.000,00, n = 8 meses e 3 dias = 243 dias, i= 40%a.a., J=?

- Comercial:

$$J = 12.000 \times \left(\frac{0,40}{360}\right) \times 243 = R\$\,3.240,00$$

Exemplo

- Exato:

$$J = 12.000 \times \left(\frac{0{,}40}{365} \right) \times 243 = R\$\, 3.195{,}62$$

Desconto Simples

- Quando se faz uma aplicação de capital com vencimento predeterminado, obtém-se um comprovante de aplicação que pode ser, por exemplo, uma nota promissória ou uma letra de câmbio.
- Caso o aplicador precise do dinheiro antes de vencer o prazo de aplicação, deve voltar à instituição capitadora, transferir a posse do título e levantar o principal e os juros já ganhos.
- Algumas vezes quitamos dívidas antes da data de vencimento. Como toda dívida pressupõe pagamento de juros, ao quitá-las antes do prazo é razoável admitir uma redução no valor a pagar.
- Desconto é o nome que se dá a essa redução do valor a pagar quando um título de crédito é resgatado antes do vencimento

Desconto Racional(desconto "por dentro")

- É o desconto obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso que seja saldado n períodos antes do seu vencimento.
- Desconto: é a quantia a ser abatida do valor nominal, o juros.
- Valor liberado: é a diferença entre o valor nominal e o desconto.
- Quando nos referimos a desconto, a taxa de juros ***i*** é chamada de '***taxa de desconto***', o valor futuro **F** é chamado de '***valor nominal***' do título (ou valor de face), ***P*** é chamado de '***valor liberado***' (ou valor presente ou valor atual) e ***n*** de '***prazo de antecipação***'.

D= J = F – P = P. i . n *e* ***P = F - D***

Exemplo

5. Uma pessoa pretende saldar um título de R$ 5.500,00, 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de juros corrente é de 40% a.a., qual o desconto e quanto vai obter (valor descontado racional)?

   Dados: F= R$ 5.500,00, n = 3, i = 40% a.a. = 10% a.t., D = ?, P = ?

   Vamos calcular o valor presente da dívida:

F = P(1 + i.n) ou *P = F / (1+i.n)*

Logo P = 5.500/(1 + 0,1 x 1) = 5.500/1,1 = R$ 5.000 e

D = F – P = 5.500 - 5.000 = R$ 500

Desconto Comercial (desconto "por fora")

- Outra forma de desconto, mais usual, é o denominado '**Desconto Comercial Simples'** (ou *desconto por fora*). Neste caso, o desconto incide sobre o valor de face F do título.

  $D = F \cdot i \cdot n$ e $P = F - D = F(1 - i \cdot n)$

Exemplo

6. Consideremos o exemplo do item anterior, em que o título de R$ 5.500,00 é descontado à taxa de 40% a.a., 3 meses antes do vencimento.

   Dados: F= R$ 5.500,00, n = 3, i = 40% a.a. = 10% a.t., D = ?, P = ?

   $D = F \cdot i \cdot n$ = 5.500 x 0,1 x 1= R$ 550

   $P = F - D$ = 5.500 – 550 = R$ 4.950

- Ao fazer um **desconto comercial** a taxa de desconto utilizada **não é mais igual à taxa de juros simples** capaz de reproduzir o montante. Se o banco ganha R$ 550,00 sobre um valor de R$ 4950,00 em 3 meses, a taxa de juros da operação é:

$$i = \frac{550}{4950} = 0{,}111\,a.t. \quad ou \quad i \cong 0{,}44\,a.a.$$

Regime de Capitalização Composta

- No regime de *juros compostos*, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte. Dizemos então que os juros são capitalizados, e como não só o capital inicial rende juros mas estes são devidos também sobre os juros formados anteriormente, temos o nome de juros compostos.

Exemplo

1. Seja um capital de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de 20% a.a. por um período de 3 anos a juros simples e compostos. Temos a seguinte tabela:

n	Juros Simples		Juros compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	1.000 x 0,2 = 200	1.200	1.000 x 0,2 = 200	1.200
2	1.000 x 0,2 = 200	1.400	1.200 x 0,2 = 240	1.440
3	1.000 x 0,2 = 200	1.600	1.440 x 0,2 = 288	1.728

Exemplo

- Observando o montante na parte dos juros compostos, na tabela, verificamos que:

- F_1 = 1.000 + 1.000 x 0, 2 = 1.000(1 + 0, 2) = 1.200

- F_2 = 1.200 + 1.200 x 0, 2 = 1.200(1 + 0,2) =
  = 1.000(1 + 0,2)(1 + 0, 2) = 1.000(1 + 0,2)^2 = 1.440

- F_3 = 1.440 + 1.440 x 0,2 = 1.440(1 + 0,2) =
  = 1.000(1 + 0,2)^2 x (1 + 0,2) = 1.000(1 + 0,2)^3 =
  = 1.728

Montante ou Valor Futuro

- Se generalizarmos para um número de períodos igual a n, tem-se a expressão geral para cálculo do montante ou valor futuro, no regime de capitalização composta, dada por:

$$F = P(1+i)^n$$

- O fator $(1+i)^n$ é denominado fator de capitalização ou fator de valor futuro.

Capital ou Valor Presente

- Desta última equação obtemos:

$$P = F \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

onde $1/(1 + i)^n$ *é* denominado fator de desconto ou fator de atualização ou fator de valor presente.

Juros

- Os juros a serem adicionados ao principal a cada período de capitalização são fornecidos pela expressão:

$$J_k = i \cdot P\,(1 + i)^{k-1}$$

- Ao final do prazo de empréstimo, o total de juros acumulado poderá ser obtido da própria definição de juros:

$$J = F - P$$

Exemplo

2. Calcular os juros e o montante devidos relativos a uma aplicação de R$ 10.000,00 pelo prazo de 8 meses à taxa composta de 4% ao mês.

   Dados: P = R$ 10.000, n = 8 meses, i = 4% a.m.

   Temos:

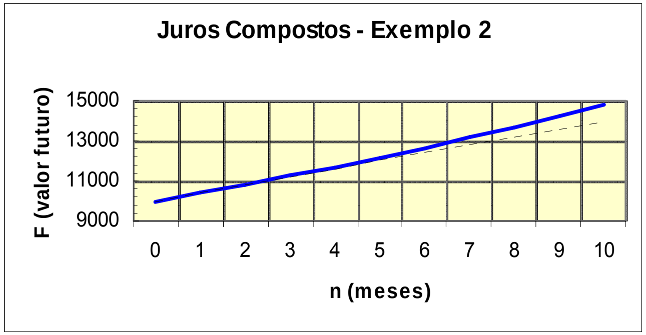
   $F = 10.000 \times (1 + 0{,}04)^8 = R\$\ 13.685{,}69$

   E, pela definição de juros:

   $J = 13.685{,}69 - 10.000{,}00 = R\$\ 3.685{,}69$

- O valor futuro F, calculado para diversos valores de n, é mostrado na figura a seguir e tem trajetória exponencial, ao invés da trajetória linear da capitalização simples.

Exemplo



Solução na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 10.000(CHS) (PV) → entra com o valor presente com sinal negativo
- 4 (i) → entra com a taxa de juros
- 9 (n) → entra com o número de períodos
- (FV) → 13.685,69 calcula o montante

Calculadora Científica

- Com uma calculadora científica, devemos usar a tecla **y** ^{x} (nas HP) ou **x**^{y} (nas Casio). A base será a soma (1 + i) e o expoente será o número de períodos de capitalização. Em seguida, multiplicamos o valor encontrado (1.368569) pelo valor presente (10000) e achamos o valor futuro F = 13.685,69.

Tabela Financeira

	4%		10%		12%	
Períodos	F. Capitalização	F. Atualização	F. Capitalização	F. Atualização	F. Capitalização	F. Atualização
1	1,04000	0,96154	1,10000	0,90909	1,12000	0,89286
2	1,08160	0,92456	1,21000	0,82645	1,25440	0,79719
3	1,12486	0,88900	1,33100	0,75131	1,40493	0,71178
4	1,16986	0,85480	1,46410	0,68301	1,57352	0,63552
5	1,21665	0,82193	1,61051	0,62092	1,76234	0,56743
6	1,26532	0,79031	1,77156	0,56447	1,97382	0,50663
7	1,31593	0,75992	1,94872	0,51316	2,21068	0,45235
8	1,36857	0,73069	2,14359	0,46651	2,47596	0,40388
9	1,42331	0,70259	2,35795	0,42410	2,77308	0,36061
10	1,48024	0,67556	2,59374	0,38554	3,10585	0,32197

Tabela Financeira

- Finalmente, podemos usar uma tabela financeira (encontrada nos livros de Matemática Financeira), que mostra valores dos fatores de capitalização e de atualização do capital para alguns prazos e taxas de juros.
- A tabela denominada ***Fator de Capitalização*** fornece o resultado da expressão $(1+i)^n$ e a tabela denominada ***Fator de Atualização*** fornece o resultado da expressão $1/(1+i)^n$
- Assim, para acharmos o valor futuro basta multiplicar o fator tabelado (observadas a taxa de juros no topo da tabela e o número de períodos na coluna mais à esquerda) pelo valor presente (10.000):

$$F = 10.000 \times 1{,}36857 = 13.685{,}70$$

Juros Compostos

- A taxa de juros pode ser calculada através da expressão:

$$i = (F / P)^{1/n} - 1$$

e o número de períodos de capitalização pela expressão:

$$n = Ln(F/P) / Ln(1+i)$$

- Novamente ressalta-se que nas situações em que a taxa de juros e o prazo de aplicação tem diferentes unidades de tempo, é necessário compatibilizá-las para a mesma unidade.

Exemplo

3. Uma pessoa toma R$ 1.000,00 emprestado a juros de 2% a.m. pelo prazo de 10 meses com capitalização composta.

   a) Qual o montante a ser devolvido?

   b) Qual é o juro pago?

   Solução:

   a) Dados: P = R$ 1.000,00, i= 2% a.m., n = 10 meses, F = ?

   $F = P(1+i)^n = 1.000(1+0{,}02)^{10} =$

   $= 1.000 \times 1{,}02^{10} =$ R$ 1.218,99

   b) $J = F - P$ =1.218,99 – 1.000 = R$ 218,99

Solução na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 1.000(CHS) (PV) → entra com o valor presente com sinal negativo
- 2 (i) → entra com a taxa de juros
- 10 (n) → entra com o número de períodos
- (FV) → 1.218,99 calcula o montante

Exemplo

4. Vamos comprar uma TV e temos as seguintes opções, pagamento a vista de R$ 400,00 ou em 4 vezes sem juros de 100,00.

   Ora se vamos pagar ao longo de 4 parcelas de 100 reais,essas parcelas não tem o mesmo valor no tempo, pois 100 reais hoje não vale o mesmo que 100 reais amanhã.

   Admitindo-se que a taxa de juros mensal para fins comerciais é de 3 % a. m ., vamos calcular os valores presentes de todos os pagamentos isto é, referidos a data de hoje o preço a vista das parcelas são:

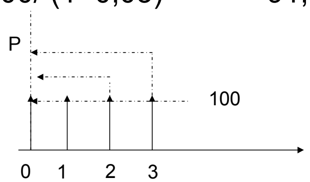
Exemplo

$100/ (1+0,03)^0 = 100,00$

$100/ (1+0,03)^1 = 97,09$

$100/ (1+0,03)^2 = 94,26$

$100/ (1+0,03)^3 = 91,51$



Exemplo

Logo preço a vista é de R$ 382,70.

Portanto, se quisermos pagar a vista precisamos ter um desconto de 400 – 382,7 = R$ 17,30.

Ou seja 17,30 / 400 = 4,325 % de desconto.

Exemplo

5. Considerando uma taxa de juros de 10% a.m., por qual das ofertas pelo seu lindo BMW você optaria:

- **Proposta A**: Pagamento à vista (hoje, dezembro de 2006) de R$ 70.000,00;
- **Proposta B**: Pagamento em duas parcelas de R$ 60.000,00, a primeira em seis meses e a segunda em 14 meses;
- **Proposta C**: Pagamento de R$ 80.000,00 em seis meses e outra parcela de R$ 40.000,00 daí a 4 meses.

Exemplo

- Solução:

  Observe que a solução do problema exige a referência dos pagamentos a uma mesma data para que os valores possam ser comparados.

  Se assumirmos março/1999 como data de referência, teremos os seguintes valores presentes nesse mês:

  Proposta A: P = R$ 70.000,00 (já está na data de referência);

  Proposta B: P = [60.000 / $(1+0,10)^6$ + 60.000 / $(1+0,10)^{14}$] = R$ 49.663,31

  Proposta C: P = [80.000 / $(1+0,10)^6$ + 40.000 / $(1+0,10)^{10}$] = R$ 60.579,64

Exemplo

- Ou seja, a **proposta A** é a que mais paga por seu BMW amarelo ovo.
- A adoção da referência em junho é a que resulta em menor número de contas a fazer. Neste caso:
- Proposta A: P = 70.000,00 . $(1+0,10)^6$ = R$ 124.009,27
- Proposta B: P = 60.000,00 + 60.000 / $(1+0,10)^8$ = R$ 87.990,44
- Proposta C: P = 80.000,00 + 40.000 / $(1+0,10)^4$ = R$ 107.320,54
- Observe, finalmente, que embora os números sejam diferentes, a conclusão é a mesma.

Exemplo

6. Calcular o capital que aplicado durante 6 anos à taxa de juros compostos de 15% a.a. transforma-se em R$ 14.000,00.

   Dados: n = 6 anos, i = 15% a.a. , F = R$ 14.000,00, P = ?

$$P = F \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{14.000}{(1+0{,}15)^6} = \frac{14.000}{(1{,}15)^6}$$

$$= \frac{14.000}{3{,}31306} = R\$\ 6.052{,}59$$

Solução na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 14.000(CHS) (FV) → entra com o montante com sinal negativo
- 15 (i) → entra com a taxa de juros
- 6 (n) → entra com o número de períodos
- (PV) → 6.052,59 calcula o capital

Exemplo

7. Em que prazo um empréstimo de R$ 55.000,00 pode ser quitado através de um único pagamento de R$ 110.624,80 se a taxa de juros compostos cobrada for de 15% a.m.?

   Dados: P = R$ 55.000,00, F = R$ 110.624,80, i = 15% a.m., n = ?

$$F = P(1+i)^n \Rightarrow 110.624{,}80 = 55.000 \times (1+0{,}15)^n$$

$$110.624{,}80 = 55.000 \times (1{,}15)^n \Rightarrow \frac{110.624{,}80}{55.000} = (1{,}15)^n$$

Exemplo

$$2{,}01136 = (1{,}15)^n$$

$$\text{Aplicando logaritmos:}$$

$$Ln(2{,}01136) = n \times Ln(1{,}15)$$

$$n = \frac{Ln(2{,}01136)}{Ln(1{,}15)} = 5 \text{ meses}$$

Ou direto da fórmula *n = Ln(F/P) / Ln(1 + i) obtendo:*

n = Ln (110.624,80 / 55.000) / *Ln(1,15) = 5*

Na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 110.624,80(CHS) (FV) → entra com o montante com sinal negativo
- 15 (i) → entra com a taxa de juros
- 55.000(PV) → entra com o capital
- (n) → 5 calcula o número de períodos

Exemplo

8. A que taxa de juros um capital de R$ 13.200,00 poderá transformar-se em R$ 35.112,26, se o período de aplicação for de 7 meses?

   Dados: P = R$ 13.200,00, F = R$ 35.112,26, n = 7 meses, i = ?

$$F = P(1+i)^n \Rightarrow 35.112{,}26 = 13.200 \times (1+i)^7$$

$$\frac{35.112{,}26}{13.200} = (1+i)^7 \Rightarrow (1+i)^7 = 2{,}66002$$

Exemplo

$$i + 1 = \sqrt[7]{2{,}66002} \Rightarrow i = 1{,}15 - 1 = 0{,}15$$

Assim i = 15% a. m.

Ou direto da fórmula:

i = (F / P) $^{1/n}$ *– 1 = (35.112,26/13.200)* $^{1/7}$ *-1*

i = (2,66002) $^{1/7}$ *-1 = 0,15*

Na HP - 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 35.112,26(CHS) (FV) → entra com o montante com sinal negativo
- 13.200(PV) → entra com o capital
- 7(n) → entra com o número de períodos
- (i) → 15 calcula a taxa de juros

Exemplo

9. Um capital de R$ 2.000,00 rendeu R$ 280,00 de juros em 2 meses. Calcular a taxa de juros ganha na aplicação.

   Dados: P = R$ 2.000,00, J = R$ 280,00,   = 2 meses, i = ?

   F = P + J = R$ 2.280,00

$$F = P(1+i)^n \Rightarrow 2.280 = 2.000 \times (1+i)^2$$

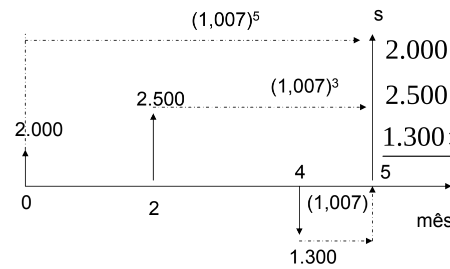
$$\frac{2.280}{2.000} = (1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2 = 1{,}14$$

$$1 + i = \sqrt{1{,}14} \Rightarrow i = 1{,}0677 - 1 = 6{,}77\%\ a.m.$$

Exemplo

10. Uma pessoa depositou R$ 2.000,00 em uma poupança. Dois meses depois deposita R$ 2.500,00 e, dois meses depois deste último depósito, realiza uma retirada de R$ 1.300,00. Qual será o saldo da poupança ao final do quinto mês se a taxa de juros compostos ganha for de 0,7% a.m.?

Exemplo



$$2.000 \times (1{,}007)^5 = 2070{,}99$$
$$2.500 \times (1{,}007)^3 = 2.552{,}87$$
$$1.300 \times (1{,}007) \ = -1.309{,}10$$
$$S = R\$3314{,}76$$

Na HP – 12 C

- (f) (REG) → apaga a memória geral da calculadora
- 0.7 (i) → entra com a taxa de juros
- 2.000(g)(CF_O) → entra com o valor do fluxo no período 0
- 0(g)(CF_j) → entra com o valor do fluxo no período 1
- 2.500(g)(CF_j) → entra com o valor do fluxo no período 2
- 0(g)(CF_j) → entra com o valor do fluxo no período 3
- 1.300(CHS)(g)(CF_j) → entra com o valor do fluxo no período 4 com o sinal trocado
- (f)(NPV) → pede para calcular o valor presente do fluxo
- (CHS)(PV) → troca o sinal e define esse valor como principal
- 5(n) → entra com o número de períodos
- (FV) → 3.314,76 calcula o montante no fin do quinto período

Equivalência de Capital

- Dizemos que duas alternativas são equivalentes quando não há razão que justifique a opção por uma delas. Na matemática financeira, pagamentos diferentes, realizados em tempos diferentes, podem ser equivalentes.
- O exemplo seguinte mostra que, em relação ao capital (ou valor presente), podemos definir:
- *'Todos os pagamentos futuros que a uma mesma taxa de juros resultam num mesmo valor presente, são equivalentes entre si e equivalentes ao valor presente'.*

Exemplo

1. Verificar se a juros compostos de 10% a.m. os capitais abaixo são equivalentes:

   a) R$ 2.200,00 daqui a 2 meses;

   b) R$ 2.662,00 daqui a 4 meses.

   Solução:

   O valor presente das alternativas será:

   a) $P = 2.200 / (1 + 0,10)^2 =$ R$ 1.818,18

   b) $P = 2.662 / (1 + 0,10)^4 =$ R$ 1.818,18

   Logo, são equivalentes.

Exemplo

2. Duas gêmeas, Amália e Amélia, pedem-lhe a mesma 'grana' emprestada. A primeira se propõe a pagar juros compostos de 4% a.m., devolvendo R$ 121.665,29 ao final de 5 meses. Amélia lhe propõe a devolução, ao final de 8 meses, de R$ 136.856,90. Para qual das gêmeas você emprestaria?

Solução:

A partir da proposta da Amália:

$P = 121.665,29 / (1 + 0,04)^5 =$ R$ 100.000,00

Exemplo

A proposta de Amélia então fica:

$P = 100.000,00 = 136.856,90 / (1 + i)^8$

Logo i = 0,04

- Daí que a taxa oferecida por Amélia é de: i = 4% a.m.
- Como ambas as propostas **tem a mesma taxa de juros e mesmo valor presente**, tanto faz emprestar a uma ou outra, muito embora apenas Amélia seja a mulher de verdade!

Taxa Efetiva

- A taxa é denominada efetiva quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida.
- Exemplos:
- 12% ao mês com capitalização mensal.
- 45% ao semestre com capitalização semestral.
- 130% ao ano com capitalização anual.

  Nesses casos diz-se somente 12% a.m, 45% a.s, ficando subentendido o período de capitalização.

Taxa Nominal

- A taxa é denominada nominal quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

  Exemplos:
- 120% ao ano com capitalização mensal.
- 45% ao semestre com capitalização mensal.
- 36% ao ano com capitalização trimestral.

Observações

- A taxa nominal é muito utilizada no mercado financeiro, entretanto, seu valor não é usado nos cálculos por não representar uma taxa efetiva.
- Por isso devemos saber a equivalência entre taxa efetiva e taxa nominal

Taxa Equivalentes

- Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes, se aplicadas ao mesmo capital durante o mesmo período de tempo, através de diferentes sistemas de capitalização, produzem o mesmo montante final, ou seja, é indiferente aplicar com uma ou outra taxa.

Exemplo

3. Exemplo: A aplicação de R$1.000,00 à taxa de 10% ao mês durante 3 meses equivale a uma única aplicação com a taxa de 33,1% ao trimestre.

- Dados: P =R$ 1.000,00 , n = 3 meses.
- i = 10% a.m. : F = 1.000 x $(1,1)^3$ = 1.000 x 1,331 = R$ 1.331,00
- i = 33,1% a.t. : F = 1.000 x (1,331) = R$ 1.331,00

Taxas Equivalentes

- Ao afirmar que a taxa nominal de uma aplicação é de 60% ao ano capitalizada mensalmente, estamos entendemos que a taxa é de 5% ao mês e que está sendo aplicada mês a mês, porque:

  60/12 = 5

- Analogamente, temos que a taxa nominal de 60% ao ano corresponde a uma taxa de 15% ao trimestre, aplicada a cada trimestre, porque:

  60/4 = 15

Cálculo de Taxas Equivalentes

- Consideraremos i_a uma taxa ao ano e i_p uma taxa ao período p, sendo que este período poderá ser: 1 semestre, 1 quadrimestre, 1 trimestre, 1 mês, 1 quinzena, 1 dia ou outro que se deseje. Deve ficar claro que tomamos 1 ano como o período integral e que o número de vezes que cada período parcial ocorre em 1 ano é indicado por *Np*.
- Temos que: 1 ano = 2 semestres = 3 quadrimestres = 4 trimestres = 12 meses = 24 quinzenas = 360 dias.
- A fórmula básica que fornece a equivalência entre duas taxas é:

$$1 + i_a = (1 + i_p)^{N_p}$$

Taxas Equivalentes

Fórmula	Taxa	Período	N_p
$1 + i_a = (1+ i_s)^2$	i_s	Semestre	2
$1 + i_a = (1+ i_q)^3$	i_q	Quadrimestre	3
$1 + i_a = (1+ i_t)^4$	i_t	Trimestre	4
$1 + i_a = (1+ i_b)^6$	i_b	Bimestre	6
$1 + i_a = (1+ i_m)^{12}$	i_m	Mês	12
$1 + i_a = (1+ i_d)^{365}$	i_d	Dias	365

Exemplo

1. Calcular o montante resultante de um investimento de R$ 1.200,00 aplicado por 3 anos a juros nominais de 16% a.a. capitalizados mensalmente.

   Dados: P = R$ 1.200,00, n = 36 meses. Como a capitalização é mensal vamos calcular a taxa efetiva ao mês.

   A taxa de 16% a.a. cap. mensalmente equivale a uma taxa efetiva de $\frac{16}{12}\%\ a.m.$

Exemplo

- Portanto
  $F = 1.200 \times (1 + 0.16/12)^{36} = R\$ \ 1.933,15$

Na HP – 12C:

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 1.200(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- 16(g)(12÷) → entra com a taxa nominal ao ano, especificando que é capitalizada mensalmente
- 3(g)(12x) → entra com o número de períodos de capitalização no prazo da operação
- (FV) → 1.933,15 calcula o montante

Exemplo

2. Calcular o valor de resgate para um capital de R$ 200,00 aplicado pelos prazos e taxas nominais seguintes:

a) 27 dias a 9% ao mês capitalizados diariamente.

$P = R\$ \ 200,00$, $n = 27$ dias, $i_d = 9/30$ %, $F = ?$

$F = 200 \times (1 + 0,09/30)^{27} = R\$ \ 216,85$

Na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 9[ENTER]30(÷)(i) → entra com a taxa nominal especificando que é capitalizada diariamente
- 27(n) → entra com o número de dias do prazo
- 200(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 216,85 calcula o montante

Exemplo

b) 8 meses a 18% a. s. capitalizados mensalmente.

$P = R\$ \ 200,00$, $n = 8$ meses, $i_m = 18/6$ % a.m. = 3% a.m.

$F = 200 \times (1 + 0,03)^{8} = R\$ \ 253,35$

Na HP – 12 C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 18[ENTER]6(÷)(i) → entra com a taxa nominal especificando que é capitalizada mensalmente
- 8(n) → entra com o número de meses do prazo
- 200(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 253,35 calcula o montante

Exemplo

c) 7 meses a 28% a.a. capitalizados trimestralmente.

P = R$ 200,00, i_t =28/4 % = 7% a.t., n = 2 trimestres (os juros são capitalizados somente 2 vezes)

F = 200 x $(1,07)^2$ = R$ 228,98

Na HP – 12 C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 28[ENTER]4(÷)(i) → entra com a taxa nominal especificando que é capitalizada trimestralmente
- 2(n) → entra com o número de trimestres do prazo
- 200(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 228,98 calcula o montante

Exemplo

3. Calcular as taxas efetivas ao ano para as seguintes taxas nominais:

a) 24 % a.a. capitalizada mensalmente.

b) 48% a.s. capitalizada mensalmente

c) 60% a.t. capitalizada diariamente

Solução

a) A taxa efetiva é : i_m = 24/12 % = 2% a.m

$$(1+i_a)=(1+i_m)^{12} \Rightarrow i_a=(1+0{,}02)^{12}-1$$

$$i_a=(1{,}02)^{12}-1=1{,}2682-1=26{,}82\%\ a.a.$$

Na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 24(g)(12÷) → entra com a taxa nominal ao ano, especificando que é capitalizada mensalmente
- 1(g)(12x) → entra com o número de períodos de capitalização no prazo da operação
- 100(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 126,82 calcula o montante
- 100(-) → 26.82 subtrai 100

Solução

b) A taxa efetiva é : i_m = 48/6 % = 8% a.m

$$(1+i_a)=(1+i_m)^{12} \Rightarrow i_a=(1+0{,}08)^{12}-1$$

$$i_a=(1{,}08)^{12}-1=2{,}5182-1=151{,}82\%\ a.a.$$

Na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 48[ENTER]6(÷)(i) → taxa nominal semestral, especificando que é capitalizada mensalmente
- 1(g)(12x) → entra com o número de períodos de capitalização no prazo da operação
- 100(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 2,5182 calcula o montante
- 100(-) → 151,82 subtrai 100

Solução

c) A taxa efetiva é : i_d = 60/90 % =2/3 % a.d.

$$(1+i_a) = (1+i_d)^{360} \Rightarrow i_a = (1+\frac{0,02}{3})^{360} - 1$$

$$i_a = 10,9357 - 1 = 9,9357 = 993,57\%\ a.a.$$

Na HP – 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 60[ENTER]90(÷) (i) → taxa nominal trimestral, especificando que é capitalizada diariamente
- 30(g)(12x) → entra com o número de capitalizações em um ano
- 100(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 10,9357 calcula o montante
- 100(-) → 993,57 subtrai 100

Exemplo

4. Uma aplicação de R$ 1.000,00 foi efetuada em 17/03/95 para resgate em 24/06/98. Se a taxa de juros ganha é nominal de 12% a.m. com capitalização diária, calcular o valor do resgate.

   Dados: P = R$ 1.000,00, n = 1.195 dias.

   Taxa efetiva: i_d = 12/30 % = 0, 4 % a.d.

   F = 1.000 x $(1 + 0,004)^{1.195}$ = R$ 117.974,14

Na HP - 12C

- (f) (FIN) → apaga a memória financeira
- 12[ENTER]30(÷) (i) → taxa nominal mensal, especificando que é capitalizada diariamente
- (g)(D.MY) → define o modo de entrada das datas (dia/mês/ ano)
- 17,031995[ENTER] → entra com a data inicial
- 24,061998(g)(ΔDYS)(n) → entra com a data final e pede para calcular os dias entre as datas dadas
- 1.000(CHS) (PV) → entra com o principal com sinal negativo
- (FV) → 117.974,14 calcula o montante

Observação

- Na HP-12C, o número exato de dias, pode ser calculado utilizando as funções calendário. Ela pode manejar datas a partir de 15/10/1582 até 25/10/4046