LISTA 5 DE CÁLCULO I

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções abaixo:
   (a) $z = 2x + 5y - 10$;
   (b) $z = 5xy - x^2$;
   (c) $z = f(x, y) = x^2y + 3y^2$;
   (d) $z = f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$;
   (e) $u = g(s, t) = 3t^2 + 2st + 5e^s$;
   (f) $z = F(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta) - 3rsen^3(4\theta + 5)$;
   (g) $z = e^{xy^2}$;
   (h) $z = 2x^2e^y$;
   (i) $z = x^2e^{3x} \ln(y)$;
   (j) $w = xze^{yz}$;
   (k) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (l) $z = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y}$;
   (m) $u = g(\theta, t) = sen(3\theta). \cos(2t)$;
   (n) $w = x^2y - 3xy^2 + 2yz$;
   (o) $w = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

2. Nas funções abaixo, calcule as derivadas parciais de segunda ordem, indicadas:
   (a) $z = (x^2 + y^2)^3/2$; z_{xx} e z_{yx};
   (b) $z = x \cos y - ye^x$; z_{yy} e z_{xy};
   (c) $w = \ln(x^2 + 8y - 3z^2)$; w_{xx} e w_{zy};
   (d) $z = \sqrt{xy}$; z_{xx} e z_{yy};
   (e) $w = y^2z + sen(x^2z)$; w_{xz};
   (f) $w = \sqrt[3]{1 - x^2} + zy^3 - yz^2$; w_{yz} e w_{xx};

3. Calcule as derivadas parciais indicadas, nos pontos P_0, dados abaixo:
   (a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2 + 3x$; $P_0(2, -3)$; z_{xy} e z_{yy};
   (b) $w = x^2y^2 - xy$; $P_0(3, -1)$; z_{xx} e z_{yy};
   (c) $z = e^{xy}$; $P_0(2, 0)$; z_{xy} e z_{yy};
   (d) $w = x \cos(y - x) + ysen\,(z - y)$; $P_0(0, \pi, 0)$; w_{xz} e w_{xy};

4. Calcule $\dfrac{du}{dt}$ usando a regra da cadeia e confira os resultados (primeiro substituindo e depois derivando).
   (a) $u = e^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = sen\,t$;

(b) $u = \dfrac{3xy}{x^2 - y^2}$, $x = t^2$, $y = 3t$;

(c) $u = x^2 + 2xy + y^2$, $x = t\cos t\, y = t sen\, t$;

(d) $u = ye^x + xe^y$, $x = \cos t\, y = sen\, t$.

5. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ usando a regra da cadeia:

(a) $u = x^2 + y^2$, $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$;

(b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $x = re^s$, $y = re^{-s}$.

6. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} sen\, kx$ é solução da ***equação de condução do calor***

$$\boxed{u_t = \alpha^2 u_{xx}}$$

7. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da ***equação de Laplace***

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$$

(*a*) $u = x^2 + y^2$; (*b*) $u = x^2 - y^2$; (*c*) $u = x^3 + 3xy^2$.
(*d*) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ (*e*) $u = sen\, x \cosh y + \cos x \sinh y$ (*f*) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

8. Verifique se a função $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ é solução da ***equação de Laplace tridimensional***

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0}$$

9. Mostre que cada uma das seguintes funções é a solução da ***equação da onda***

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$$

(*a*) $u = sen(kx)sen(akt)$ (*c*) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(*b*) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$ (*d*) $u = sen(x - at) + \ln(x + at)$

10. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no exercício 9.

Respostas:

1. (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5$;

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5y - 2x$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5x$;

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 6y$;

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y + 6$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y$;

(e) $\dfrac{\partial g}{\partial s} = 2t + 5e^s$ e $\dfrac{\partial g}{\partial t} = 6t + 2s$;

(f) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 2r\cos(2\theta) - 3sen^3(4\theta + 5)$ e

$\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -2r^2 sen(2\theta) - 36r sen^2(4\theta + 5)\cos(4\theta + 5)$;

(g) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$;

(h) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4xe^y$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 e^y$;

(i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x})\ln y$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2 e^{3x}}{y}$;

(j) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ze^{yz}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz^2 e^{yz}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x(zy + 1)e^{yz}$;

(k) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(l) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x^2 - y - 4xy}{(x^2 - y)^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^2 + x}{(x^2 - y)^2}$;

(m) $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 3\cos(3\theta)\cos(2t)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -2sen\,(2t) \cdot sen\,(3\theta)$;

(n) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy - 3y^2$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 6xy + 2z$ e $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 2y$;

(o) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 8y$ e $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 18z$.

2. (a) $\dfrac{3(2x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *e* $\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

   (b) $-x\cos y$ *e* $-sen\,y - e^x$;

   (c) $\dfrac{-2(x^2 - 8y + 3z^2)}{(x^2 + 8y - 3z^2)^2}$ *e* $\dfrac{48z}{(x^2 + 8y - 3z^2)^2}$;

   (d) $-\dfrac{y^2}{4}(xy)^{-3/2}$ *e* $-\dfrac{x^2}{4}(xy)^{-3/2}$;

   (e) $2x[\cos(x^2 z) - x^2 z\, sen(x^2 z)]$;

   (f) $3y^2 - 2z$ *e* $-\dfrac{2}{3}(1 - x^2)^{-2/3} - \dfrac{8}{9}x^2(1 - x^2)^{-5/3}$.

3. (a) $z_{xy}(P_0) = -96$ *e* $z_{yy}(P_0) = 26$;

(b) $z_{xx}(P_0) = 2 \;\; e \;\; z_{yy}(P_0) = 18;$

(c) $z_{xy}(P_0) = 1 \;\; e \;\; z_{yy}(P_0) = 4;$

(d) $w_{xz}(P_0) = 0 \;\; e \;\; w_{xy}(P_0) = 0.$

4. $a)\, 0;$ $\qquad c)\, 2t + 2t\, sen\, 2t + 2t^2 \cos 2t;$

   $b)\; -\dfrac{-9(t^2+9)}{(t^2-9)^2};$ $\qquad d)\; -sen^2 t + e^{\cos t} - sen\, t \cdot e^{sen\, t} + \cos^2 t \cdot e^{sen\, t} + \cos t \cdot e^{\cos t}.$

5. $a)\, 4r^3 + 4rs^2 \;\; e \;\; 4s^3 + 4r^2 s;$ $\qquad b)\, \dfrac{1}{r} \;\; e \;\; \dfrac{e^{4s}-1}{e^{4s}+1}.$

6. sim

7. (b), (d), (e) e (f) são.