Lista 1 de Cálculo II - Prof. Edézio

1. Ache a derivada direcional das funções abaixo, na direção do vetor $\overrightarrow{u}$ dado. Em alguns ítens, ache o valor da respectiva derivada direcional, no ponto indicado.
   (a) $z = 2x^2 + 5y^2$; $\overrightarrow{u} = (1, 1)$;
   (b) $z = 3x^2 - 4y^2$; $\overrightarrow{u} = (1, \sqrt{3})$;
   (c) $w = 3x^2 + 4y^2 - 4z^2$; $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \sqrt{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$;
   (d) $z = x^2 - 2xy^2$; $\overrightarrow{u} = (-1, 0)$; $P(1, -2)$;
   (e) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $\overrightarrow{u} = (2, 2)$; $P(0, 1)$;
   (f) $z = e^{(x^2-y^2)}$; $\overrightarrow{u} = (1, 3)$; $P(1, 1)$.

2. Determine o vetor gradiente das funções dadas nos pontos indicados:
   (a) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $P(1, 1)$;
   (b) $z = sen(3x + y)$; $P(0, \pi/2)$;
   (c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $P(0, 0)$;
   (d) $z = x^2 + y^2 - 3$; $P(0, 0)$;
   (e) $w = x^2y^2z^2 + senx$; $P(0, 2, 1)$:
   (f) $z = x^2 - 4y$; $P(-2, 2)$;
   (g) $z = e^{2xy}$; $P(2, 1)$.

3. Sabendo que $f(x, y) = \dfrac{2}{x^3 + y}$, determine:
   (a) A direção $\overrightarrow{u}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y)$ é máxima;
   (b) O valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x, y)$

4. Sabendo que $f(x, y) = 3x + 4y + \dfrac{1}{\pi} sen(\pi x^2 y)$, determine:
   (a) A derivada direcional máxima de f(x,y) no ponto $P(1, 1/2)$;
   (b) O vetor unitário da direção do item (a).

5. O potencial elétrico em qualquer ponto (x, y) no plano xy é V volts e $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. A distância é medida em metros
   (a) Encontre a taxa de variação do potencial no ponto $(0, \pi/4)$ na direção do vetor unitário $(\cos \pi/6, sen\pi/6)$;
   (b) Encontre a direção e a magnitude da taxa de variação máxima de V em $(0, \pi/4)$.

6. Considere a função $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0(2, 2)$. Determine:
   (a) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (1, 1)$;
   (b) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.

7. A função $T(x,y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a taxa de variação da temperatura em relação as variáveis x e y, no ponto $P(1,2)$.

8. A temperatura em qualquer ponto de uma placa retangular situada no plano xy é T(x,y) graus e sabe-se que $T(x,y) = 3x^2 + 2xy$. A distância é medida em metros.

   (a) Ache a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $P(3,-6)$ da placa;

   (b) Ache a direção e sentido do vetor em que a taxa de variação é máxima, no ponto P acima.

Respostas:

1. $a)\, 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y;\quad b)\, 3x - 4\sqrt{3}y;\quad c)\, 3x + \sqrt{2}y + 4z;\quad d)\, 6;$
   $e)\, -\dfrac{\sqrt{6}}{6};\quad f)\, -\dfrac{2\sqrt{10}}{5}.$

2. $a)\, (\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2});\quad b)\, (0,0);\quad c)\, (0,0);\quad d)\, (0,0);$
   $e)\, (1,0,0);\quad f)\, (-4,-4);\quad g)\, e^4(2,4) = (2e^4, 4e^4).$

3. $a)\, \nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{6x^2}{(x^2+y)^2}, -\dfrac{-2}{(x^3+y)^2}\right);\quad b)\, \dfrac{2\sqrt{9x^4+1}}{(x^3+y)^2}.$

4. $a)\, 5;\quad b)\, (3/5, 4/5).$

5. $a)\, -1;\quad b)\, (0,-1) = -\overrightarrow{j}.$

6. $a)\, 3\sqrt{2};\quad b)\, (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5).$

7. $\dfrac{\partial T}{\partial x} = -4 \quad e \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = -12.$

8. $a)\, 6\sqrt{2};\quad b)\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}.$