Variável Aleatória

Uma variável aleatória é uma variável numérica, cujo valor medido pode variar de uma réplica para outra do experimento.

Exemplos:

(i) Variáveis aleatórias contínuas: corrente elétrica, comprimento, comprimento, pressão, temperatura, tempo , voltagem, peso.

(ii) Variáveis aleatórias discretas: número de arranhões em uma superfície, proporção de peças defeituosas entre 1000 testadas, número de bits transmitidos que foram recebidos com erro.

Distribuição de Probabilidade

A distribuição de uma variável aleatória X, é uma descrição do conjunto das probabilidades associadas com os valores possíveis para X. A distribuição de probabilidade pode ser especificada em mais de uma maneira: tabelas, gráficos e expressões matemáticas.

Função Distribuição de Probabilidade

Para uma variável aleatória discreta X, com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a **função distribuição de probabilidade** é

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Função Distribuição Acumulada (Cumulativa)

A função distribuição cumulativa de uma variável aleatória discreta X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \Sigma_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Valor Esperado de uma Variável Aleatória

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Seja $p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1, 2, ..., n, ...$ Então,a média ou o valor esperado de X (ou esperança matemática de X), denotado por μ ou $E(X)$ é definido como

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

Este número é também denominado valor médio de X, ou expectância de X.

Observação: Se X tomar apenas um número finito de valores, a expressão acima se torna

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i).$$

Isto pode ser considerado como uma *média ponderada* dos valores possíveis $x_1, x_2, ..., x_n$.

Variância de uma Variável Aleatória

Seja X uma variável aleatória discreta. Definimos a variância de de X, denotada por $V(X)$ ou σ_X^2, da maneira seguinte:

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(x_i).$$

A raiz quadrada positiva de $V(X)$ é denominada o **desvio-padrão** de X, e é denotado por σ_X.

Teorema: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

Observação: Lembrar que E(X) é uma constante.

Exemplo: O serviço meteorológico classifica o tipo de céu que é visível, em termos de *graus de nebulosidade*. Uma escala 11 categorias é empregada: 0, 1, 2,..., 10, onde 0 representa um céu perfeitamente claro, 10 representa um céu completamente encoberto, enquanto os outros valores representam as diferentes condições intermediárias. Suponha-se que tal classificação seja feita em uma determinada esta';cão meteorológica, em um determinado dia e hora. Seja X a variável aleatória que pode tomar um dos 11 valores acima. Admita-se que a distribuição de probabilidade de X seja

$p(0) = p(10) = 0,05;\ p(1) = p(2) = p(8) = p(9) = 0,15;\ p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 0,06$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(0,15) + 2(0,15) + 3(0,06) + 4(0,06) + 5(0,06) + 6(0,06) + 7(0,06) \\ &\quad +8(0,15) + 9(0,15) + 10(0,05) \\ &= 5,0 \end{aligned}$$

Distribuição Binomial

Suponha que peças saiam de uma linha de produção e sejam classificadas como defeituosas (D) ou não-defeituosas (N), isto é, perfeitas. Admita que três dessas peças, da produção de um dia, sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com esse esquema. O espaço amostral para êsse experimento, S, pode ser assim apresentado.

$$S = \{DDD,\ DDN,\ DND,\ NDD,\ NND,\ NDN,\ DNN,\ NNN\}$$

Suponhamos que seja 0,2 a probabilidade de uma peça ser defeituosa e 0,8 a de ser não-defeituosa. Admitamos que essas probabilidades sejam as "mesmas " para cada peça, ao menos enquanto durar o nosso estudo. Finalmente, admita-se que a classificação de qualquer peça em particular, seja independente da classificação de qualquer outra peça.

Empregando essas suposições, segue-se que as probabilidades associadas aos vários resultados do espaço amostral S, como se explicou acima, são:

$$(0,2)^3, (0,8)(0,2)^2, (0,8)(0,2)^2, (0,8)(0,2)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,2)(0,8)^2, (0,8)^3$$

Desejamos estudar a variável aleatória X a qual atribui a cada resultado $s \in S$ o número de peças defeituosas encontradas em s. Consequentemente, o conjunto dos valores possíveis de X é $\{1,\ 2,\ 3\}$.

Poderemos obter a distribuição de probabilidade de X, $p(x_i) = P(X = x_i)$, da seguinte maneira:

$X = 0$ se e somente se ocorrer NNN.
$X = 1$ se e somente se ocorrer $DNN,\ NDN$ ou NND.
$X = 2$ se e somente se ocorrer $DDN,\ DND$ ou NDD.
$X = 3$ se e somente se ocorrer DDD.

então
$p(0) = P(X = 0) = (0,8)^3$
$p(1) = P(X = 1) = 3.(0,2)(0,8)^2$
$p(2) = P(X = 2) = 3.(0,2)^2(0,8)$
$p(3) = P(X = 3) = (0,2)^3$

Observe que $p(o) + p(1) + p(2) + p(3) = (0,8 + 0,2)^3 = 1$.

Observando o exemplo acima temos que as seguintes hipóteses ocorrem:

1. n provas independentes e do mesmo tipo, são realizadas;
2. cada prova admite dois resultados - sucesso (não-defeituosa) ou fracasso (defeituosa);
3. a probabilidade de sucesso (não-defeituosa) é p e de fracasso (defeituosa) é $1 - p$.

Um experimento aleatório, consistindo em n repetições com as hipóteses acima é chamado um *experimento binomial.*

Definição: Seja X uma variável aleatória que é igual ao número de sucessos em n repetições do experimento binomial. Então sua distribuição de probabilidade é denominada distribuição binomial com parâmetros p e n em que $0 < p < 1$ e $n = \{1, 2, \ldots\}$

A função probabilidade de X é

$$p(k) = P(X = k) = C_{n,k}\, p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,\ 1, ...,\ n.$$

Se X for uma variável aleatória binomial com parâmetros p e n, então

$$\mu = E[X] = np \ \text{ e } \sigma^2 = V[X] = np(1-p)$$

Exercícios:

1. Uma moeda é jogada 10 vezes. Calcular as seguintes probabilidades:
   (a) de ocorrer 6 caras;
   (b) de ocorrer pelo menos 2 caras;

(c) de não ocorrer nenhuma coroa;

(d) de ocorrer pelo menos uma coroa;

(e) de não ocorrer 5 coroas e 5 caras.

2. A probabilidade de um atirador acertar o alvo é 1/3. Se ele atirar 6 vezes, qual a probabilidade de:

   (a) acertar exatamente 2 tiros?

   (b) não acertar nenhum tiro?

Distribuição de Poisson

Seja X uma variável aleatória discreta, tomando os seguintes valores: $0, 1, 2, ..., n, ...$. Se

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}, k = 0, 1, ..., n, ...$$

diremos que X tem distribuição de Poisson, com parâmetro $\alpha > 0$.

Observação:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha}e^{\alpha} = 1.$

(ii) $E[X] = \alpha$ e $V[X] = \alpha$.

Teorema: Seja X uma variável aleatória distribuida binomialmente com parâmetro p (baseado em n repetições de um experimento). Isto é,

$$P(X = k) = C_{n,k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Admita-se que quando $n \to \infty$, fique $np = \alpha$ (constante), ou equivalentemente, quando $n \to \infty, p \to 0$, de modo que $np \to \alpha$. Nestas condições teremos

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!},$$

que é a distribuição de Poisson com parâmetro α.

A distribuição de Poisson é uma aproximação da distribuição binomial para n grande e p pequeno. Ela é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de um certo tipo, que ocorrem em um intervalo de tempo, ou superfície, ou volume, tais como:
(a) número de chamadas telefônias recebidas por um PBX durante um intervalo pequeno de tempo;
(b) número de falhas de um computador em um dia de operação;
(c) número de relatórios de acidentes enviados a uma companhia de seguros em uma semana.

Exemplo: Um PBX recebe uma média de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, obter a probabilidade de que o PBX não receba chamadas durante um intervalo de 1 minuto.

Solução: Segue-se que $\alpha = 5$ chamadas por minuto e

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = e^{-5} = 0,0067.$$

Por outro lado, se queremos a probabilidade de se obter no máximo 2 chamadas em 4 minutos, temos $\alpha = 20$ chamadas em 4 minutos, logo,

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \\
&= \frac{e^{-20}20^0}{0!} + \frac{e^{-20}20^1}{1!} + \frac{e^{-20}20^2}{2!} = \\
&= e^{-20} + 20e^{-20} + 200e^{-20} = (1+20+200)\, e^{-20} \\
&= 221e^{-20} \simeq 0
\end{aligned}$$

Distribuição multinomial

É uma generalização da binomial. Consideremos a possibilidade de k alternativas, isto é, repartimos o espaço amostral em k eventos $A_1,\ A_2, ..., A_k$, mutuamente exclusivos com probabilidade

$$P_1,\ P_2, ..., P_k\,(P_i = P(A_i)),\ \text{tal que } P_1 + P_2 + ... + P_k = 1.$$

Se x_i é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de S, $i = 1, ..., k$, temos que em n provas, a probabilidade de que A_1 ocorra x_1 vezes, A_2 ocorra x_2 vezes ,..., A_k ocorra x_k vezes é igual a:

$$P(x_1 = n_1,\ x_2 = n_2, ..., x_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\ n_2!...n_k!} p_1^{n_1}...p_k^{n_k}\ onde\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Exemplo: Jogue um dado 8 vezes. Calcule a probabilidade de aparecer dois números 2 e dois números 5 e os demais números uma única vez.

Solução: Sejam x$_1$: aparecer o 1; x$_2$: aparecer o 2;...; x$_6$: aparecer o 6. Então

$$P(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 1) =$$
$$\tfrac{6!}{1!2!1!1!2!1!}(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^1(\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^1$$