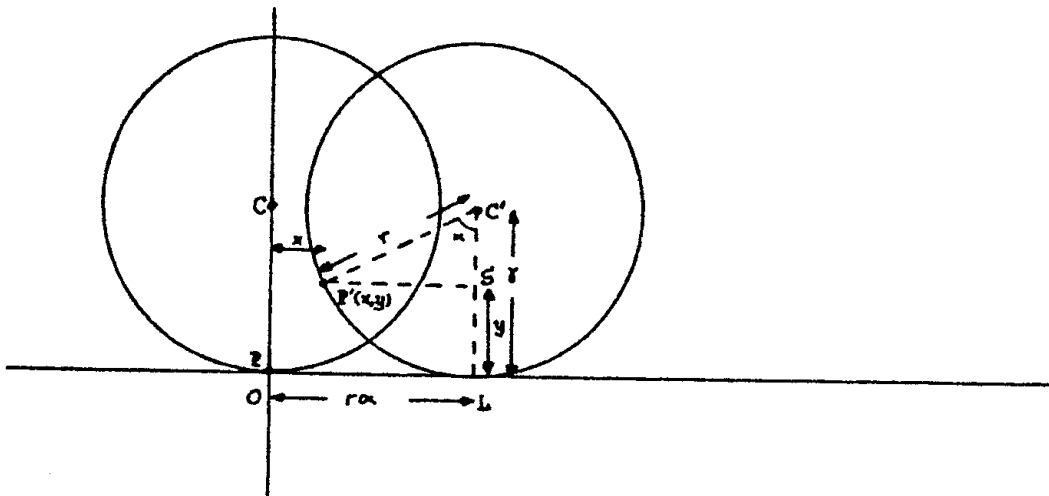


# Equacions i demostracions de les propietats de la cicloide

- Anem a veure si podem trobar la equació de la cicloide. Agafem uns eixos de coordenades còmodes, la línia recta on es recolza la roda serà l'eix "x" i l'eix "y" serà la perpendicular a ella pel punt que s'ha senyalat a la roda quan aquest es troba al terra.



- Deixem que la roda rodi una mica i mirem a on ha anat a parar el punt P de la circumferència. Quan el centre del cercle C ha passat a C', el punt P ha passat a P'. Aquest és el punt del qual volem saber la seva equació. Diem a les seves coordenades (x,y). Com que la roda no rellisca sobre el terra, el que sabem és que la longitud de l'arc LP sobre la circumferència és igual a la longitud

del segment rectilini OL. Si li diem  $\alpha$  a l'angle LC'P' mesurat en radianes, resulta  $OL=LP'=r\alpha$ . Per altra banda, les coordenades de P' en el nostre sistema són:

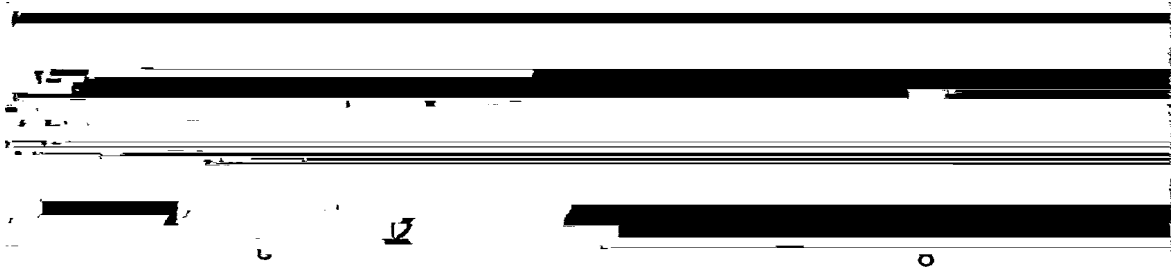
$$\begin{aligned}x &= OL - P'S = r\alpha - r\sin\alpha \\y &= SL = C'L - C'S = r - r\cos\alpha\end{aligned}$$

Així obtenim l'equació en coordenades paramètriques (paràmetre  $\alpha$ ) de la cicloide.

$$\begin{aligned}x &= r\alpha - r\sin\alpha \\y &= r - r\cos\alpha\end{aligned}$$

- La cicloide té propietats geomètriques molt interessants. Quina serà la seva longitud?

$$dx / d\alpha = r(1 - \cos\alpha) ; dy / d\alpha = r\sin\alpha$$



Aquí resulta que la longitud de la cicloide és 8 vegades la del radi de la roda. No té res a veure amb  $\pi$  com en principi es podria esperar.

- Quina seria l'àrea sota la corba de la cicloide? Es troba d'una manera senzilla una vegada tenim l'equació de la corba:

$$\int_0^{2\pi r} y dx = \int_0^{2\pi} (r-r \cdot \cos \alpha) (r-r \cdot \cos \alpha) d\alpha = 3\pi r^2$$

i l'àrea sota la corba de la cicloide és 3 vegades l'àrea del cercle que engendra la corba. Per tant, les àrees de les tres regions senyalades a la figura són iguals:



- Anem a determinar ara la normal, és a dir, la perpendicular a la tangent, en un punt (x,y) de la corba corresponent al paràmetre  $\alpha$ . Tenim:

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = r \cdot \sin \alpha$$

La pendent de la normal serà  $-\frac{1}{dy/dx} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha}$

i per tant la normal en el punt del paràmetre  $\alpha$  tindrà per equació:

$$\frac{y - (r - r \cos \alpha)}{x - (r\alpha - r \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha}$$

és a dir, fent operacions:

$$\mathbf{x\cos\alpha - y\sin\alpha - x - r\alpha\cos\alpha + r\alpha = 0}$$

- Ja tenim la normal en cada punt de la cicloide. Anem a trobar ara l'evolvent d'aquestes rectes, és a dir, la corba que és tangent a totes elles. Per fer-ho només cal derivar l'equació de les rectes respecte a  $\alpha$  i eliminar  $\alpha$  entre la equació que resulta i la primera, la de les normals. Així s'ha d'eliminar  $\alpha$  entre les dos següents:

$$\begin{aligned}\mathbf{x\cos\alpha - y\sin\alpha - x - r\alpha + r\alpha} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{-x\sin\alpha - y\cos\alpha - r\cos\alpha + r\sin\alpha + r} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

- En lloc d'eliminar  $\alpha$  farem una cosa més senzilla, aïllarem  $x$  i  $y$  en funció de  $\alpha$ . Així obtindrem les equacions paramètriques de l'evolvent. D'aquesta manera és molt més fàcil. Es multiplica la primera equació per  $\cos\alpha$  i la segona per  $\sin\alpha$ , es sumen. Resulta una cosa molt simple:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{r\alpha + r\sin\alpha} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{-r + \cos\alpha}\end{aligned}$$

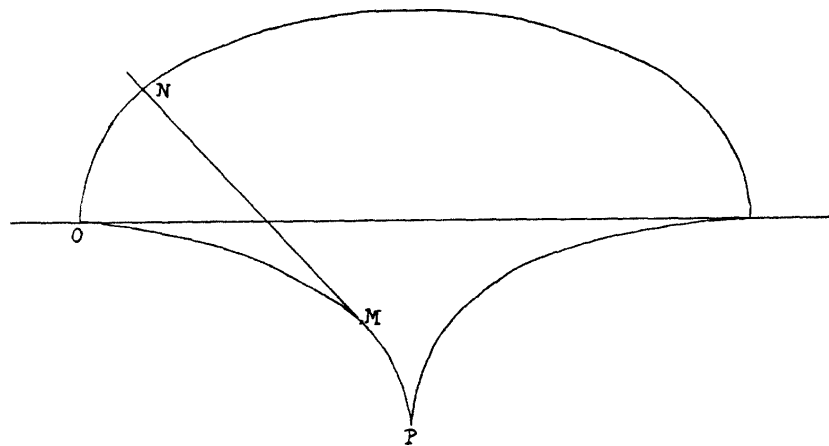
- Quina corba és aquesta? Si es representa s'assembla a la cicloide en la seva forma. Serà una cicloide? Traslladem els eixos al punt  $(r\pi, -2r)$  per comparar amb l'equació de la cicloide, referida al mateix tipus d'eixos, que hem trobat abans. Així resulta l'equació:

$$\begin{aligned}x &= \overline{X} + r\pi & \overline{X} &= r(\alpha - \pi) + r\sin\alpha = r(\alpha - \pi) - r\sin(\alpha - \pi) \\ y &= \overline{Y} - 2r & \overline{Y} &= r + r\cos\alpha = r - r\cos(\alpha - \pi)\end{aligned}$$

i dient  $\alpha - \pi = \theta$  obtenim:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= r\theta - r \cdot \text{sen } \theta \\ \bar{Y} &= r - r \cos \theta \end{aligned}$$

- Amb el que resulta que...!l' envoltent de les normals a la cicloide és la mateixa cicloide traslladada  $r\pi$  a la dreta i  $2r$  cap a baix! No hi ha gaires corbes amb aquesta propietat, com es pot comprovar mirant les més conegudes, circumferències, el·lipse...



- La cicloide té moltes més propietats interessants però que no tractaré en el treball perquè és necessària assolir un nivell de matemàtiques més elevat del que jo tinc fins a aquests moments.