MODELO LINEAL CON K VARIABLES

Mariana Marchionni

mariana@depeco.econo.unlp.edu.ar

Repaso: el modelo lineal con 2 variables

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad\qquad i = 1, \dots, N$$

donde el término aleatorio satisface los siguientes supuestos clásicos

1. $E[u_i] = 0 \quad \forall\, i$
2. $V[u_i] = E[(u_i - E[u_i])^2] = E[u_i^2] \equiv \sigma^2 \quad \forall\, i$ (homocedasticidad)
3. $Cov[u_i, u_j] = 0 \quad \forall\, i \neq j$ (no correlación entre observaciones)
4. X_i no son aleatorias y no son todas iguales

Interpretación de los parámetros en el modelo lineal con 2 variables

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad\qquad i = 1,\ldots,N$$

- El supuesto E[u_i] = 0 implica que:

$$E[Y_i] = \alpha + \beta X_i$$

  Es decir, en "promedio" *Y* depende únicamente de *X*. Alternativamente, "en promedio" el término aleatorio *u* no importa (se compensa entre observaciones).

- ¿Cuál es el efecto de *X* sobre el valor esperado de *Y*? Derivando con respecto a *X* obtenemos

$$\frac{dE[Y_i]}{dX_i} = \beta$$

- α es la ordenada al origen del modelo: si $X_i = 0$ luego E[Y_i] = α

El modelo lineal con K variables (modelo lineal general)

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_K X_{Ki} + u_i \qquad\qquad i = 1,\ldots,N$$

Ahora tenemos multiplicidad de regresores o variables explicativas: X_1 a X_K. La primera "variable" en realidad es X_{1i}=1 para todo *i* y corresponde al intercepto del modelo.

Mantendremos todos los supuestos clásicos salvo una pequeña modificación:

Las variables X_k no guardan relaciones lineales exactas entre ellas.

Este supuesto se conoce como *supuesto de no-multicolinealidad perfecta*.

Interpretación de los parámetros en el modelo con K variables

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + ... + \beta_K X_{Ki} + u_i \qquad i = 1,..., N$$

Al igual que en el modelo con 2 variables, el supuesto $E[u_i]=0$ implica que

$$E[Y_i] = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + ... + \beta_K X_{Ki}$$

Entonces:

$$\frac{\partial E[Y_i]}{\partial X_{ki}} = \beta_k$$

Los coeficientes se interpretan como derivadas parciales, es decir, miden el efecto sobre $E[Y_i]$ de cambiar marginalmente la k-ésima variable explicativa, **manteniendo constantes todas las demás**. Esto es válido para variables explicativas continuas.

Para variables explicativas discretas

Supongamos ahora que X_s es discreta. ¿Cuál es el efecto de un cambio en X_s sobre E[Y]?

Entonces:

$$\Delta E[Y_i] = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_s (X_{si} + \Delta X_{si}) + \ldots + \beta_K X_{Ki} - [\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_s X_{si} + \ldots + \beta_K X_{Ki}]$$

$$= \beta_s \Delta X_{si}$$

donde ΔX_s es el cambio en X_s.

Estimación de parámetros en el modelo lineal con k variables

Adaptamos algunas definiciones que vimos previamente:

$$\hat{Y}_i \equiv \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{Ki} \quad \rightarrow \text{Estimación de } Y_i$$

$$e_i \equiv Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \ldots + \hat{\beta}_K X_{Ki}) \rightarrow \text{Error de estimación o residuo}$$

Los parámetros β_k con $k=1,\ldots K$ se obtienen siguiendo el mismo procedimiento que vimos antes:

se buscan los estimadores $\hat{\beta}_k$ que minimizan la suma del cuadrado de los errores (SCR).

Formalmente:

$$\underset{\hat{\beta}_k\ k=1,\dots K}{Min}\ SCR = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \dots + \hat{\beta}_K X_{Ki}) \right]^2$$

$$\text{CPO:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial SCR}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial SCR}{\partial \hat{\beta}_K} = 0 \end{cases}$$

Estas CPO constituyen un sistema de K ecuaciones lineales con K incógnitas. Si las K ecuaciones son linealmente independientes existe solución y esa solución es única.

Sin embargo, la expresión de la solución se hace engorrosa. Recurrimos a notación matricial.

El modelo lineal general usando notación matricial

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_K X_{Ki} + u_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

Es equivalente al siguiente sistema de N ecuaciones:

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \ldots + \beta_K X_{K1} + u_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \ldots + \beta_K X_{K2} + u_2$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

$$Y_N = \beta_1 + \beta_2 X_{2N} + \ldots + \beta_K X_{KN} + u_N$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente forma:

$$Y = X\beta + u$$

definiendo los siguientes vectores y matrices

$$\underset{(N\times 1)}{Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}}, \quad \underset{(K\times 1)}{\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}, \quad \underset{(N\times 1)}{u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}} \quad \text{y} \quad \underset{(N\times K)}{X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2N} & \cdots & X_{KN} \end{bmatrix}}$$

Notar que:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2N} & \cdots & X_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Ver algunos resultados de álgebra matricial

El método de mínimos cuadrados en notación matricial

El modelo en notación matricial es $Y = X\beta + u$

Definimos los siguientes vectores

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K \end{bmatrix} \qquad \hat{Y} = X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_N \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$(K \times 1) \qquad (N \times 1) \qquad (N \times 1)$$

Entonces $SCR = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$

El problema en notación matricial es

$$\underset{\hat{\beta}}{Min}\, SCR = e'e$$

CPO:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \dfrac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}_K} \end{vmatrix} = 0$$

<u>Obtención del vector $\hat{\beta}$ de estimadores MC :</u>

$$e'e = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Notar que los términos 2do y 3ro son escalares iguales. Luego:

$e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$ y derivando respecto del vector $\hat{\beta}$ se obtiene

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0 - 2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad si\ \exists\ (X'X)^{-1}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

¿Qué garantiza la existencia de la inversa de la matriz (*X'X*)?

$$\rho(X) = K \ (*) \Rightarrow \rho(X'X) = K \ \Rightarrow |X'X| \neq 0 \ \Rightarrow \exists \ (X'X)^{-1}$$

(*) es uno de los supuestos clásicos. Lo demás sigue de propiedades de las matrices.

Seguimos con:

- Propiedades algebraicas de los estimadores MC en el modelo con K variables.
- Popiedades estadísticas: insesgamiento, varianza de los estimadores MC, estimador de la varianza del término aleatorio
- Teorema de Gauss-Markov. Demostración.
- Ejemplo empírico: el efecto de la contaminación en el valor de las casas.