

Cointegración

El caso bivariado

Definición: La serie Y_t es **integrada de orden d** (denotada $I(d)$) si al menos debe ser diferenciada d veces para que sea estacionaria.

Ejemplos:

1. El proceso *random walk* es $I(1)$ dado que:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Delta Y_t = \varepsilon_t$$

el cual es estacionario.

2. Cualquier proceso estacionario es trivialmente $I(0)$.

Definición: Dos series Y_t y X_t están **cointegradas** si:

1. Ambas son $I(d)$, $d \neq 0$ y el mismo d para las 2 series.
2. Existe una combinación lineal de ambas que es $I(0)$, es decir, existe $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ distinto de cero tal que:

$$a_1 Y_t + a_2 X_t \text{ es } I(0)$$

el vector \mathbf{a} es llamado vector de cointegración (CV).

Discusión

- Se refiere a la relación entre procesos no estacionarios con raíces unitarias. Cuando dos series están cointegradas, a pesar de que ambos procesos son no estacionarios, existe una relación de **equilibrio a largo plazo** que vincula a ambas series tal que esta relación es estacionaria.
- **Problema de la no unicidad**: si **a** es un CV, luego **ba** es también un CV para algún **b**.
Solución: “normalizar” imponiendo $a_1=1$, es decir, el CV normalizado es $(1, a_2)$, donde a_2 = coeficiente de cointegración.

Discusión

- **Regresiones espúreas:** si Y_t y X_t son ambas $I(1)$, el modelo lineal bajo los supuestos clásicos:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

no tiene sentido, a menos que las series estén cointegradas. Por qué?

Test de Cointegración

La aproximación de Engle-Granger:

- **Paso 1:** Testear que ambas variables tengan el mismo orden de integración, por ejemplo, que ambas sean $I(1)$ (test de raíz unitaria en cada serie).
- **Paso 2:** Suponer que X e Y están cointegradas con coeficiente de cointegración \mathbf{b} . Si conocemos \mathbf{b} , luego $Y_t - a - bX_t$ debe ser $I(0)$ para algún \mathbf{a} .

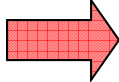
Engle-Granger: \mathbf{a} y \mathbf{b} pueden ser estimados consistentemente por *OLS* en $Y_t = a + bX_t + u_t$

 estimar \mathbf{a} y \mathbf{b} por *OLS* y formar los residuos \mathbf{e} .

Test de Cointegración

- **Paso 3:** test de raíz unitaria en los residuos \mathcal{E}_t .
 \mathcal{E}_t tiene raíz unitaria  rechazar *cointegración*

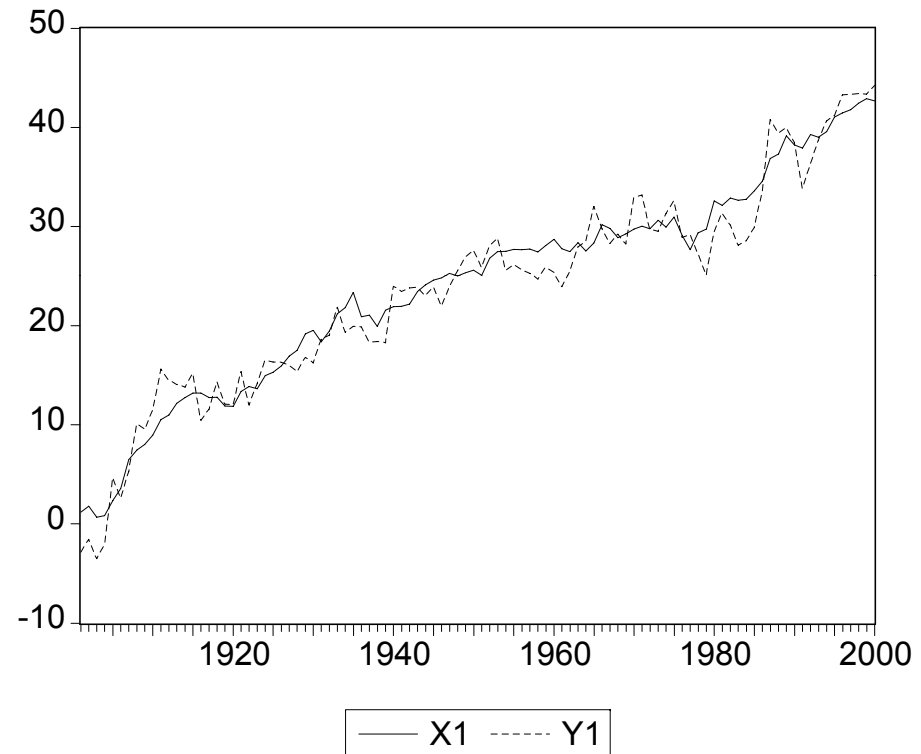
Este es un test donde la hipótesis nula es de **no cointegración**.

- ✓ Confusión:
Aceptar raíz unitaria en los residuos  rechazar *cointegración*.
- ✓ Necesitamos usar una tabla diferente dado que el test **no** se basa en u_t , sino en \mathcal{E}_t .

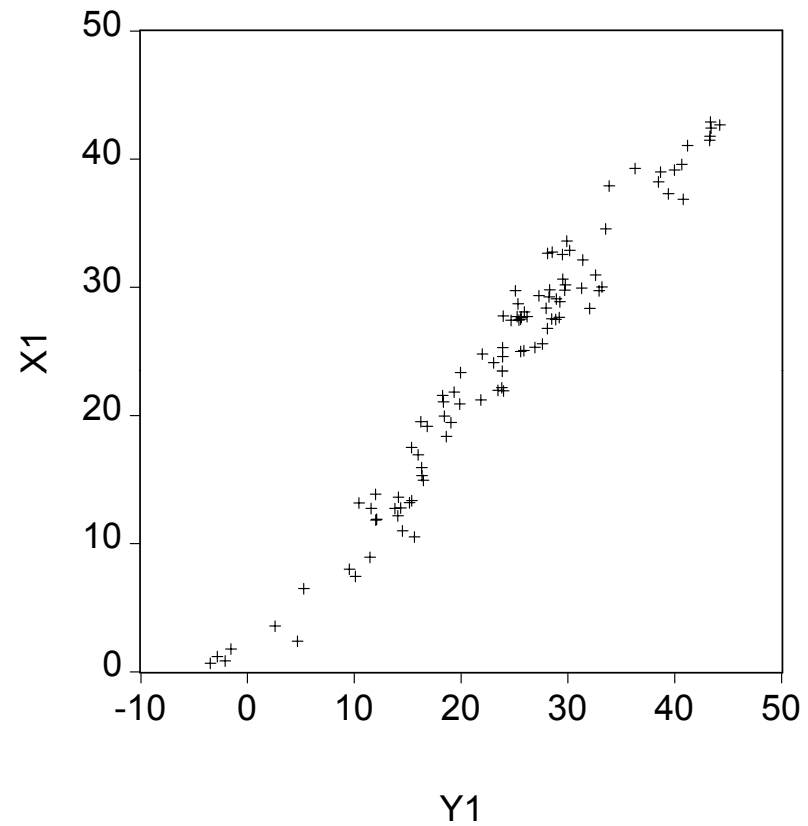
Ejemplo Empírico

- Consumo e ingreso.
- 100 años.
- x_1 = consumo
- y_1 = ingreso

(no es un caso real)



La fuerte relación
positiva podría ser
espúrea!



Test de cointegración

Paso 1: Test de raíz unitaria en cada serie

En ambos casos se incorporó un intercepto, tendencia y 2 rezagos (ADF)

a) Consumo (x1)

ADF Test Statistic	-3.301963	1% Critical Value*	-4.0550
		5% Critical Value	-3.4561
		10% Critical Value	-3.1536

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- No se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (5% y 1%)

b) Ingreso (y1)

ADF Test Statistic	-4.018827	1% Critical Value*	-4.0550
		5% Critical Value	-3.4561
		10% Critical Value	-3.1536

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- Este caso está muy cerca de la región de rechazo.
- Procederemos como si hubiera raíces unitarias (aún cuando no está claro para el ingreso).

Paso 2:

Estimar la relación de cointegración de largo plazo

OLS of x1 in y1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.346856	0.524970	2.565587	0.0118
Y1 0	.959203	0.020268	47.32702	0.0000

R-squared	0.958081	Mean dependent var	23.94998
Adjusted R-sq	0.957653	S.D. dependent var	10.59064
S.E. of regression	2.179373	Akaike info criterion	1.577872
Sum squared resid	465.4675	Schwarz criterion	1.629975
Log likelihood	-218.7875	F-statistic	2239.846
Durbin-Watson	0.832551	Prob(F-statistic)	0.000000

- Notar que si las series no están cointegradas, es probable que sea una regresión espúrea.

Paso 3:

Test de raíz unitaria en los residuos

Test de raíz unitaria, sin intercepto, 2 rezagos.

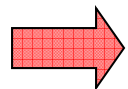
ADF Test Statistic	-4.165693	1% Critical Value*	-2.5871
		5% Critical Value	-1.9434
		10% Critical Value	-1.6175

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Valores críticos (Engle and Granger (1987))

	1%	5%	10%
No lags	-4.07	-3.37	-3.03
With lags	-3.73	-3.17	-2.91

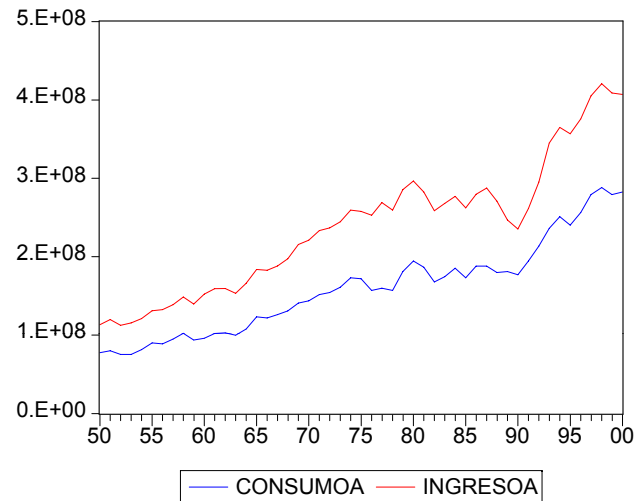
Se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos.



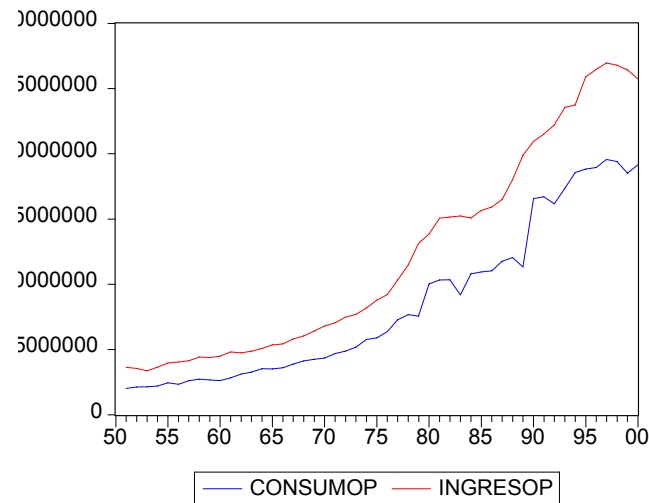
Rechazamos la hipótesis nula de *no-cointegración!!*

Ejemplo Empírico: caso real

- Argentina:
- Consumo e Ingreso.
- 1950 – 2000

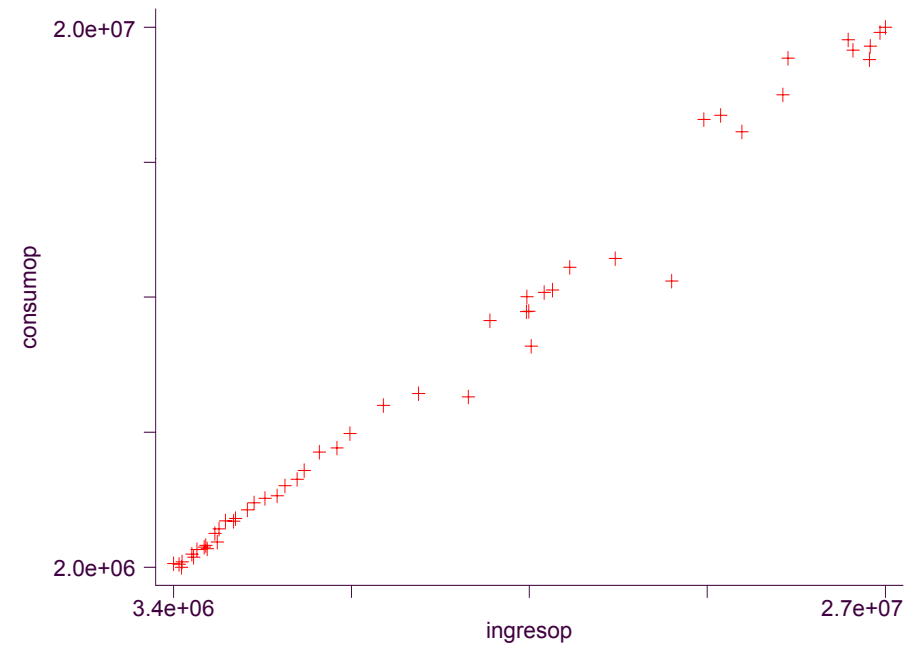
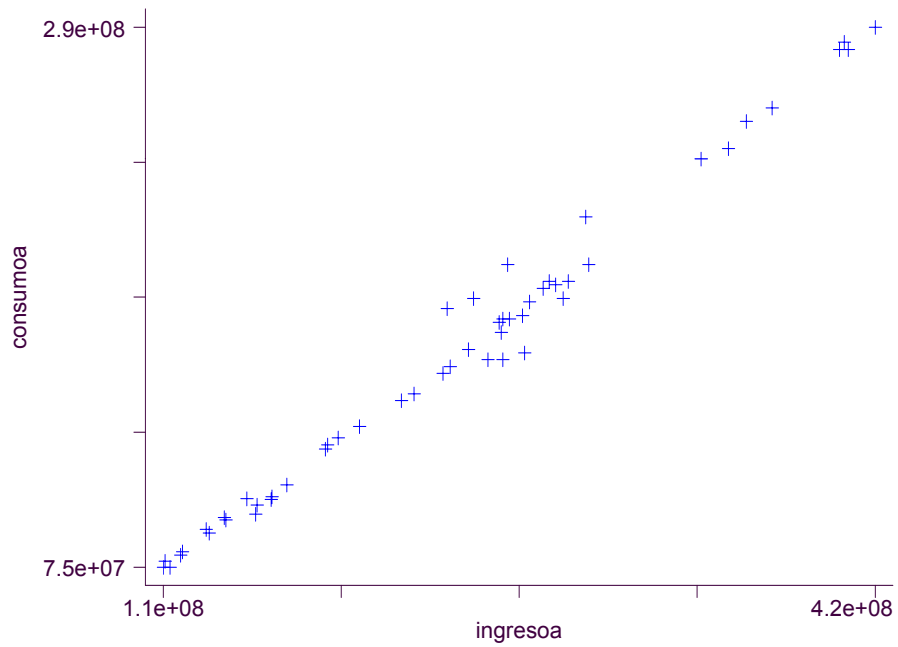


- Paraguay:
- Consumo e Ingreso.
- 1951 - 2000



Fuente: Penn World Table 6.1

- La fuerte relación positiva podría ser espúrea!



Análisis de Cointegración

Caso 1: Argentina

Caso 2: Paraguay

Test de cointegración: Argentina

Paso 1: Test de raíz unitaria en cada serie

En ambos casos se incorporó un intercepto, tendencia y 2 rezagos (ADF)

a) Consumoa

ADF Test Statistic	-1.323172	1% Critical Value*	-4.1584
		5% Critical Value	-3.5045
		10% Critical Value	-3.1816

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- No se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (10%, 5% y 1%).

b) Ingresoa

ADF Test Statistic	-1.841233	1% Critical Value*	-4.1584
		5% Critical Value	-3.5045
		10% Critical Value	-3.1816

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- No se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (10%, 5% y 1%).
- Procederemos como si hubiera raíces unitarias en ambas series.

Paso 2:

Estimar la relación de cointegración de largo plazo

Dependent Variable: CONSUMOA

Method: Least Squares

Sample: 1950 2000

Included observations: 51

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4825715.	3087158.	-1.563158	0.1245
INGRESOA	0.689775	0.012197	56.55273	0.0000
R-squared	0.984910	Mean dependent var	1.60E+08	
Adjusted R-squared	0.984602	S.D. dependent var	59740777	
S.E. of regression	7413113.	Akaike info criterion	34.51383	
Sum squared resid	2.69E+15	Schwarz criterion	34.58958	
Log likelihood	-878.1025	F-statistic	3198.211	
Durbin-Watson stat	0.388049	Prob(F-statistic)	0.000000	

- Notar que si las series no están cointegradas, es probable que sea una regresión espúrea.

Paso 3:

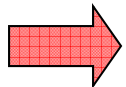
Test de raíz unitaria en los residuos

Test de raíz unitaria, sin intercepto, 2 rezagos.

ADF Test Statistic	-2.535221	1% Critical Value*	-2.6110
		5% Critical Value	-1.9476
		10% Critical Value	-1.6194

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- Se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos al **5%** y **10%**.



Rechazamos la hipótesis nula de *no-cointegración!!*

Test de cointegración: Paraguay

Paso 1: Test de raíz unitaria en cada serie

En ambos casos se incorporó un intercepto, tendencia y 2 rezagos (ADF)

a) Consumop

ADF Test Statistic	-1.780470	1% Critical Value*	-4.1630
		5% Critical Value	-3.5066
		10% Critical Value	-3.1828

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- No se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (10%, 5% y 1%).

b) Ingresop

ADF Test Statistic	-2.240166	1% Critical Value*	-4.1630
		5% Critical Value	-3.5066
		10% Critical Value	-3.1828

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- No se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (10%, 5% y 1%).
- Procederemos como si hubiera raíces unitarias en ambas series.

Paso 2:

Estimar la relación de cointegración de largo plazo

Dependent Variable: CONSUMOP

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 1951 2000

Included observations: 50 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-617886.7	176612.4	-3.498546	0.0010
INGRESOP	0.745730	0.012150	61.37691	0.0000
R-squared	0.987419	Mean dependent var	8465261.	
Adjusted R-squared	0.987156	S.D. dependent var	6014135.	
S.E. of regression	681579.9	Akaike info criterion	29.74139	
Sum squared resid	2.23E+13	Schwarz criterion	29.81787	
Log likelihood	-741.5348	F-statistic	3767.125	
Durbin-Watson stat	1.903810	Prob(F-statistic)	0.000000	

- Notar que si las series no están cointegradas, es probable que sea una regresión espúrea.

Paso 3:

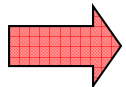
Test de raíz unitaria en los residuos

Test de raíz unitaria, sin intercepto, 2 rezagos.

ADF Test Statistic	-3.641872	1% Critical Value*	-2.6120
		5% Critical Value	-1.9478
		10% Critical Value	-1.6195

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

- Se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria en los residuos al **1%**, **5%** y **10%**.



Rechazamos la hipótesis nula de *no-cointegración!!*