Procesos No-Estacionarios. Raices Unitarias.

Walter Sosa-Escudero

June 8, 2009

Procesos univariados no-estacionarios

Recordar: Y_t es *estacionario* si y solo si:

1. $E(Y_t) = \mu < \infty, \ \ \forall t$
2. $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j < \infty, \ \ \forall t, \forall j$

Y_t es no-estacionario si por lo menos alguna de las dos condiciones anteriores no se cumple

Breve catalogo de procesos no-estacionarios

1. Tendencia deterministica

$$Y_t = a + dt + u_t$$

a, d parametros, t es un indice temporal, u_t es cualquier proceso estacionario con $E(u_t) = 0$ y $V(u_t) = \sigma^2 < \infty$.

Es simple verificar

- $E(Y_t) = a + dt$
- $V(Y_t) = V(u_t) = \sigma^2$

Entonces:

- La fuente de no estacionariedad es la *media*.
- Es una fluctuacion estacionaria alrededor de una tendencia deterministica.

2. Random walk

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
Y_0 &= 0 \\
Y_1 &= Y_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \\
Y_2 &= Y_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_t &= Y_{t-1} + \varepsilon_t = \textstyle\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i
\end{aligned}$$

Entonces:

- $E(Y_t) = 0$
- $V(Y_t) = t\,\sigma^2$. La fuente de no-estacionariedad es la *varianza*.

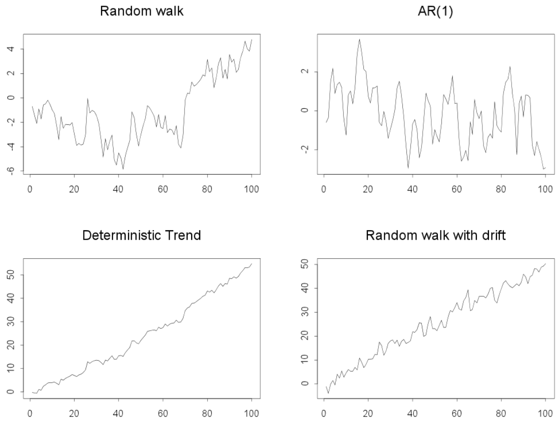
3. Random walk with drift

$$Y_t = m + Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

$$\begin{array}{rcl}
Y_0 & = & 0 \\
Y_1 & = & m + Y_0 + \varepsilon_1 = m + \varepsilon_1 \\
Y_2 & = & m + Y_1 + \varepsilon_2 = 2m + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
Y_t & = & m + Y_{t-1} + \varepsilon_t = tm + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i
\end{array}$$

- $E(Y_t) = tm$
- $V(Y_t) = t\sigma^2$
- La fuente de no estacionariedad es la media y la varianza.
- Un RWD es una TD mas un RW.

Ejemplos



- Es muy dificil distintinguir entre RWD y TD, y entre RW y AR(1).
- Son procesos completamente diferentes.

Procesos con raices unitarias

Los procesos de raiz unitaria son aquellos que incluyen un random walk (RW y RWD).

Un test de raiz unitaria es un test de la hipotesis nula:

$$H_0 : \phi = 1 \qquad \text{vs.} \qquad H_A : |\phi| < 1$$

en el siguiente modelo:

$$Y_t = m + \phi Y_{t-1} + dt + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Este modelo incluye a varias estructuras como casos particulares

$$Y_t = m + \phi Y_{t-1} + dt + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Casos particulares:

Caso	Proceso	Parametros	Hipotesis sobre ϕ
1	AR(1)	$\lvert\phi\rvert < 1, d = 0$	Alternativa
2	TD	$\lvert\phi\rvert < 1, d \neq 0$	Alternativa
3	RW	$\phi = 1, d = m = 0$	Nula
4	RWD	$\phi = 1$	Nula

Los casos 3 y 4 (H_0) son procesos con *raiz unitaria*. Implican una forma muy particular de no-estacionariedad. La prueba de 1 y 3 es trivial. 2 y 4 no tanto.

Prueba del caso 2: Si $|\phi| < 1$

$$Y_t(1 - \phi L) = m + d\,t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \frac{m}{1-\phi} + \frac{d\,t}{1-\phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}$$

Notar que

$$t/(1-\phi L) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i (t-i) = \frac{t}{1-\phi} - \frac{\phi}{(1-\phi)^2}$$

reemplazando:

$$Y_t = \mu^* + \frac{d\,t}{1-\phi} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L}$$

con $\mu^* \equiv [m(1-\phi) - d\phi]/(1-\phi)^2$. Notar que $z_t \equiv \varepsilon_t/(1-\phi L)$ puede escribirse como $z_t = \phi z_{t-1}\phi + \varepsilon_t$, si $|\phi| < 1$, que es un AR(1) estacionario. Entonces Y_t es una tendencia deterministica.

Ejercicio: verificar el caso (4).

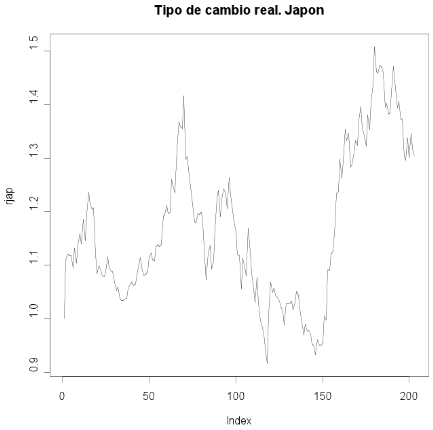
Porque es relevante evaluar raices unitarias?

- La interpretacion de los resultados de un test de raiz unitaria depende de como estan especificados los otros parametros (d, m).
- La 'regla' es tener una interpretacion *economica* coherente para la hipotesis nula y la alternativa.

1. Evaluar estacionariedad

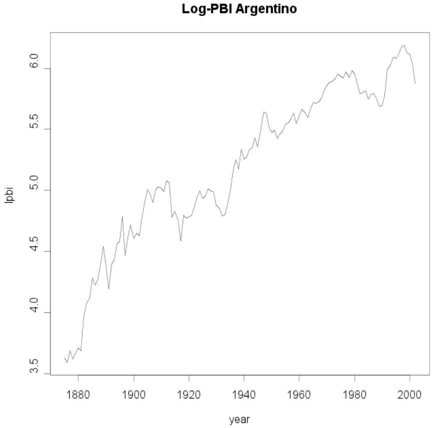
- Corresponde a contrastar el caso 1 (AR(1)) versus el 3 (RW). Bajo H_0 el proceso es no-estacionario, bajo H_A es estacionario. El test tiene sentido si estamos dudando de la estacionariedad.
- Ejemplo: tasa de interes, empleo, precio de un activo.

Ejemplo



- Es realmente estacionario?

2. Determinar la fuente de no-estacionariedad



Es una tendencia deterministica o un proceso de raiz unitaria?

Diferencias entre TD y RWD

1. *Varianza*
   - TD = acotada y fija. $V(Y_t) = \sigma^2 < \infty$).
   - RWD = no acotada. $V(Y_t) = T\sigma^2 \rightarrow \infty$.

2. *Transformacion para estacionariedad*
   - TD = restar la tendencia: $Y_t - d\,t = m + u_t \sim$ estacionario
   - RWD = tomar diferencia: $Y_t - Y_{t-1} = d + \varepsilon_t \sim$ estacionario

3. Efecto de shock en t sobre Y_{t+s}

a) Random walk with drift

Recordar que para el RWD:

$$Y_t = tm + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i$$

$$Y_{t+s} = tm + \sum_{i=1}^{t+s} \epsilon_i$$

Entonces

$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = 1$$

b) Tendencia deterministica

Caso simple: $Y_t = a + dt + u_t, \quad u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$

Recordar de que u_t puede escribirse como:

$$u_t = \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i},$$

entonces,

$$u_{t+s} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t+s-i},$$

de modo que

$$\frac{\partial u_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \phi^s.$$

Entonces, como $Y_{t+s} = a + d(t+s) + u_{t+s}$,

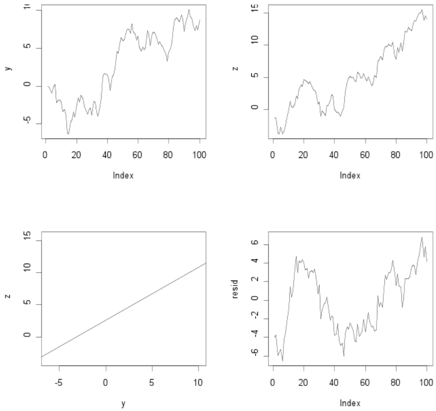
$$\frac{\partial Y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t} = \phi^s$$

En TD el efecto tiende a desaparecer cuando $s \to \infty$ *mientras que en RWD no desaparece. Efectos permanentes (RWD) vs. transitorios (TD)*

3. Regresion espuria

- Supongamos que Y_t y X_t tienen raices unitarias.
- Granger y Newbold (1974): los resultados de regresar ambas series son *espureos*: tienden a presentar R^2 alto y estadisticos 't' significativos aun cuando las series no guarden ninguna relacion entre ellas.
- No toda regresion de procesos con raices unitarias es espurea (cointegracion)
- Practica usual: descartar la presencia de raices unitarias.

Ejemplo: Dos RW independientes




```
------------------------------------------------------------
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.64416    0.39644    6.67 1.53e-09 ***
y            0.82388    0.07234   11.39  < 2e-16 ***
------------------------------------------------------------
Multiple R-Squared: 0.5696,     Adjusted R-squared: 0.5652
F-statistic: 129.7 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
------------------------------------------------------------
```

Tests de raiz unitaria

Caso 1: $H_0 : \phi = 1$ vs. $H_A : |\phi| < 1$ en: $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

Bajo H_0: RW, Bajo H_A : AR(1) estacionario con media cero.

Restando Y_{t-1} en ambos lados:

$$\Delta Y_t = g Y_{t-1} + u_t =$$

con $g \equiv (\phi - 1)$. Entonces $H_0 : \phi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad g = 0$

- En esta especificacion el test de raiz unitaria es el estadistico 't' de significatividad de g.
- *Problema: a diferencia del caso de regresion estandar, bajo* H_0 *el estadistico NO tiene distribucion asintotica normal* (Dickey y Fuller, 1979).

- El ‘test de Dickey-Fuller’ se basa en un estadistico ‘t’ simple.
- La distribucion asintotica de este estadistico bajo H_0 es no-estandar (no confundir!).
- En este formato, un test de raiz unitaria es un test de no-estacionariedad.

Caso 2: $H_0 : \phi = 1$ vs. $H_A : |\phi| < 1$ en: $Y_t = m + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- La interpretacion del modelo bajo H_0 y H_A depende del valor de m.
- Si $m = 0$ estamos en el caso anterior.
- Si $m \neq 0$, bajo H_0 es un RWD y bajo H_A es un AR(1) estacionario con media no-nula.
- Es importante chequear si $m \neq 0$ bajo H_0.

Caso 3: $H_0 : \phi = 1$ vs. $H_A : |\phi| < 1$ en: $Y_t = m + \phi Y_{t-1} + d\, t + \varepsilon_t$

- La interpretacion del modelo bajo H_0 y H_A depende de los valores de m y d.
- Cuando $m, d \neq 0$, bajo H_0 : RWD y bajo $H_A : TD$.
- En forma similar, restando Y_{t-1}, el test de Dickey-Fuller corresponde al estadistico t del modelo:

$$\Delta Y_t = m + gY_{t-1} + dt + \varepsilon_t$$

- Tambien es relevante evaluar m y d.

Sobre constantes y tendencias:

- Mas alla del sentido estadistico que pueda tener incluirlas o no, la guia fundamental es que el modelo en cuestion tenga sentido *economico* bajo H_0 y bajo H_A.

  Ejemplos: Precio de acciones?, PBI?, Desempleo?

Tests ADF y de Phillips/Perron

1. Dickey-Fuller Aumentado

DF suponen que $u_t \sim RB(0, \sigma^2)$ en

$$\Delta Y_t = gY_{t-1} + u_t =$$

Si u_t no es ruido blanco, Dickey and Fuller (1979) utilizar:

$$\Delta Y_t = gY_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + u_t =$$

Problema: determinacion de p (lag-length). El resultado es mas 'apropiado' para p grande, pero implica una gran perdida de grados de libertad.

Soluciones: usar BIC, general-a-particular, etc.

2. Phillips-Perron

Alternativamente, Phillips y Perron (1988) sugieren una modificacion simple para lidiar con el problema de u_t no independiente y con varianza variable.

Lamentablemente, la expresion para la correccion involucra algunas nociones de analisis espectral que estan por afuera de los objetivos de este curso. Ver notas de clase (Class-Notes on Unit Root Asymptotics) para una motivacion de la necesidad de efectuar la correccion y algunos detalles adicionales. Un tratamiento un poco mas completo es Stock (1994).

Resultados de muestra finita

- Los tests son muy sensibles a la introduccion de constantes y tendencias y a la eleccion del numero de rezagos.
- Hay una suerte de 'trade-off' entre consistencia y potencia en la especificacion de los componentes deterministicos (tendencia y constante) similar al problema estandar de variables omitidas.
- Incrementar espureamente el numero de rezagos baja la potencia. BIC y General-a-Particular andan razonablemente bien (Pantula, 1994).

- Todos los tests tienen muy baja potencia con alternativas relevantes cercanas a la hipotesis nula.
- DFA tiene tamaño correcto pero baja potencia. PP, lo contrario.
- Importa la extension del periodo y NO la frecuencia (Shiller y Perron, 1988).