

Econometria con Series Temporales

Walter Sosa-Escudero

May 24, 2009

¿Porque series temporales?

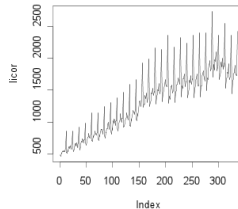
- Inhabilidad de la economía de producir experimentos controlados para estudiar relaciones causales entre variables.
- Una alternativa consiste en estudiar estas relaciones a partir de la *evolucion* historica o temporal de estas variables.
- El paradigma estandar de 'muestra independiente' no tiene sentido. El analisis de series temporales intenta dar cuenta de estas dependencias.
- Regresion espurea: el analisis de regresion 'estandar' puede no tener coherencia logica con procesos fuertemente dependientes: raices unitarias, cointegracion.

Cuatro ejemplos

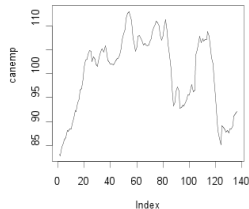
Log-PBI Argentino



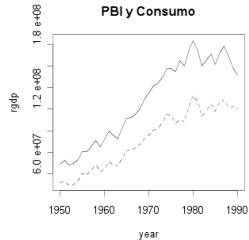
Venta de licor



Empleo en Canada



PBI y Consumo



Algunas características de series economicas

- 1 Fuertes tendencias.
- 2 Difícil de distinguir tendencias y ciclos.
- 3 Ciclos estocásticos, difíciles de predecir.
- 4 Comportamientos estacionales marcados.
- 5 Oscilaciones muy erráticas, no hay tendencias ni ciclos obvios.
- 6 Covariaciones sugerentes.
- 7 Cambios estructurales.

Regresion Espurea

Granger y Newbold (1974)

- El analisis de regresion clasico tiene serios inconvenientes cuando las series tienen cierto tipo de tendencias.
- Econometria de series temporales: redefinir el analisis de regresion para que el mismo pueda ser utilizado con series con fuerte comportamiento inercial.
- Es necesario introducir varios conceptos
 - 1 Estacionariedad y no-estacionariedad.
 - 2 Procesos estacionarios simples.
 - 3 Procesos no-estacionarios simples.
 - 4 Cointegracion y regresion con procesos no-estacionarios.
 - 5 Modelos de regresion dinamicos y cointegracion.

Procesos estacionarios

- **Proceso estocastico:** coleccion de variables aleatorias ordenadas.
- **Serie de tiempo:** el orden es el tiempo.

$$Y_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

El punto central es que los Y_t no son necesariamente independientes.

Definamos:

- $\mu_t \equiv E(Y_t)$.
- $\gamma_{0t} \equiv V(Y_t)$.
- $\gamma_{t,j-t} \equiv Cov(Y_t, Y_{t-j}) = j$ -esima autocovarianza

Y_t es **estacionario** si y solo si:

- 1 $E(Y_t) = \mu < \infty, \quad \forall t$
- 2 $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \gamma_j < \infty, \quad \forall t, \forall j$

Este es un concepto muy importante.

- Estacionario $\simeq$ estable.
- Estacionariedad implica restricciones sobre la esperanza y, fundamentalmente, sobre la estructura de covarianzas. (Y_t puede tener esperanza constante y así y todo ser no-estacionario). Estacionariedad es bastante mas que 'no-tendencia'
- Si Y_t es estacionario:

$$Cor(Y_t, Y_{t-j}) \equiv \rho_j = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-j})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t-j})}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

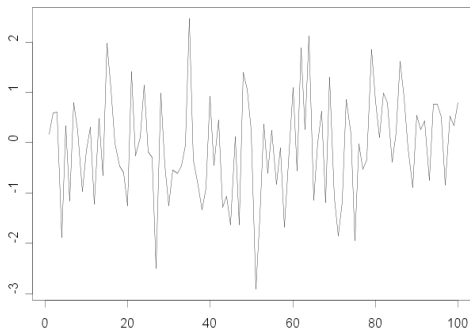
Ruido Blanco

Es el ejemplo mas simple de proceso estacionario.

$Y_t, t = 1, 2, \dots, T$ es un proceso de *ruido blanco* si:

- ❶ $E(Y_t) = 0, \forall t.$
 - ❷ $V(Y_t) = E(Y_t^2) = \sigma^2 < \infty, \forall t$
 - ❸ $Cov(Y_i, Y_j) = 0, \forall i \neq j.$
- Es por construccion estacionario. Es una coleccion de variables aleatorias con media cero y no correlacionadas entre ellas.
 - Es el proceso mas simple de todos. Notacion:
 $Y_t \sim RB(0, \sigma^2).$
 - Ejemplo: El termino de error de un modelo de regresion clasico es ruido blanco.

Ejemplo: Ruido Blanco



- 100 realizaciones.
- Que es predecible en un ruido blanco y que no es predecible en un RB?

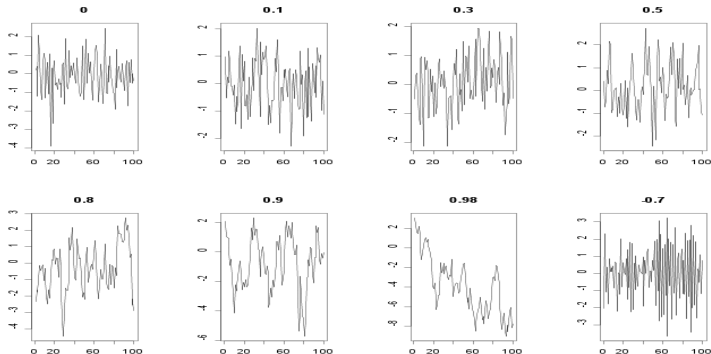
Proceso AR(1) estacionario

Y_t es un **proceso autorregresivo de orden 1** estacionario si

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

con $|\phi| < 1$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$



- ¿Cual es el efecto de aumentar ϕ ?
- ¿En que sentido $AR(1)$ produce ciclos parecidos a los de una economia?

Resultado: AR(1) es estacionario si $|\phi| < 1$.

Plan: obtener las esperanzas y covarianzas y mostrar que no dependen de t .

Partamos de

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Notar que

$$Y_{t-1} = c + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \phi(c + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= c + c\phi + \phi^2 Y_{t-2} + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Ahora reemplacemos $Y_{t-2} = c + \phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$.

$$Y_t = c + c\phi + c\phi^2 + \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Continuando con este proceso:

$$Y_t = c(1 + \phi + \phi^2 + \dots) + (\varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 \varepsilon_{t-3} + \dots) + \lim_{s \rightarrow \infty} \phi^s Y_{t-s}$$

Si $|\phi| < 1$:

$$Y_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

Con esta informacion podemos obtener los momentos

- $E(Y_t) = E \left[c/(1 - \phi) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i} \right] = c/(1 - \phi)$, constante.
- $V(Y_t) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$, constante

Prueba:

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= V \left(\frac{c}{1 - \phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i} \right) \\ &= V \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{2i} V(\varepsilon_{t-i}) \quad \text{porque?} \\ &= \sigma^2/(1 - \phi^2). \end{aligned}$$

- $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \phi^j \sigma^2$, no depende de t .

Prueba: Recordar:

$$Y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-j}) &= E(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-j} - E(Y_{t-j})) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-j-i}\right) \end{aligned}$$

Vamos despacio

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= E(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)(\varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-2} + \phi^2\varepsilon_{t-3} + \dots) \\ &= \phi\sigma^2 \text{ porque?} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= E(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots)(\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-3} + \phi^2\varepsilon_{t-4} + \dots) \\ &= \phi^2\sigma^2 \text{ porque?} \end{aligned}$$

En general

$$Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \phi^j\sigma^2, \quad j = 1, 2, \dots$$

que no depende de t .

Resumen: el proceso AR(1) estacionario.

$$Y_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}, \quad |\phi| < 1$$

- $E(Y_t) = c/(1 - \phi)$
- $V(Y_t) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$
- $Cov(Y_t, Y_{t-j}) = \phi^j \sigma^2$
- $Cor(Y_t, Y_{t-j}) = \phi^j$

En el proceso AR(1) estacionario la dependencia entre periodos tiende a debilitarse a medida en que se distancian los periodos comparados (las correlaciones decaen).

Extensiones y generalizaciones

$MA(\infty)$: proceso de media móvil infinito

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

con ε_t ruido blanco

- Estacionario si $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.
- $AR(1)$ es un caso particular: $\mu = c/(1 - \phi)$ y $\psi_i = \phi^i$.
- $MA(q)$

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^q \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

El proceso $MA(q)$ es **siempre** estacionario.

- AR(p): $Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$
- Asi como el AR(1), tambien el AR(p) estacionario puede expresarse como un $MA(\infty)$
- Teorema de representacion de Wold: todo proceso estacionario puede expresarse como un $MA(\infty)$.
- Box-Jenkins: analisis de procesos estacionarios en base a modelos AR y MA (muy populares en los 60-70).
Esencialmente predictivos.

Disgresion: Operadores de Rezago

- $LY_t \equiv Y_{t-1}$
- $L^k Y_t \equiv Y_{t-k}$. Intuitivamente: $LL \cdots LY_t = Y_{t-K}$.
- $\alpha(L) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_K L^K$

$$\alpha(L)Y_t = \alpha_0 Y_t + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \cdots + \alpha_K Y_{t-K}$$

Casos particulares:

- $\alpha(L) = \Delta Y_t \equiv (1 - L)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
- $\alpha(L) = 1 - \alpha L$. Si $|\alpha| < 1$,

$$\frac{1}{1 - \alpha L} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \dots$$

$$\text{y } (1 - \alpha L)(1 - \alpha L)^{-1}Y_t = Y_t.$$

Ejemplo: AR(1)

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \iff (1 - \phi L)Y_t = c + \varepsilon_t$$

Si $|\phi| < 1$, aplicando $(1 - \phi L)^{-1}$ a ambos lados,

$$Y_t = \frac{c}{1 - \phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L}$$

Llamando $z_t \equiv c$

$$\begin{aligned} Y_t &= z_t(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots) + \varepsilon_t(1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots) \\ &= c + \phi c + \phi^2 c + \dots + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \\ &= \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$