EL MODELO IS-LM *

Versión preliminar e inconclusa

DERRY QUINTANA AGUILAR
derryquintana@yahoo.es
econometrix_group@yahoo.es
http://es.geocities.com/derryquintana

Marzo del 2005

***Para entender este apunte se requiere tener nociones del teorema de la función implícita y ecuaciones diferenciales, escríbanme en caso de errores u omisiones.**

MODELO IS-LM ESTÁTICO

Hicks (1937)

- ✓ Economía cerrada.
- ✓ Precios rígidos.
- ✓ La economía opera a niveles por debajo del pleno empleo.
- ✓ Los agentes demandan dinero no sólo con fines de transacción, sino también con fines especulativos.

Equilibrio en el mercado de bienes (Investment-Saving)

$$Y = C\left(\underset{+}{YD}\right) + I\left(\underset{-}{r}\right) + G \quad (1)$$

$$YD = Y - T\left(\underset{+}{Y}\right) \quad (2)$$

$$i = r + \pi^e \quad (3)$$

Equilibrio en el mercado monetario (Liquidity preference-Money)

$$L(\underset{+}{Y}, \underset{-}{i}) = \frac{M}{P} \quad (4)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$Y = C\left(Y - T\left(\underset{+}{Y}\right)\right) + I\left(i - \underset{-}{\pi^e}\right) + G \quad (5)$$

Diferenciando totalmente (4) y (5) y ordenando por excesos de demanda, siendo las variables endógenas y e i:

$$-S_{YD}\delta Y + I_r \delta i = I_r \delta\pi^e - \delta G$$

$$L_Y \delta Y + L_i \delta i = \frac{1}{P}\delta M - \frac{M}{P^2}\delta P \quad (6)$$

Donde:

$$S_{YD} = 1 - C_{YD}\left(1 - T_Y\right)$$

Pendientes:

IS: haciendo que sólo en (6) cambie la tasa de interés y el nivel de producción se tiene la siguiente expresión en el plano (di, dy), la cual normalmente es negativa:

$$\left.\frac{\delta i}{\delta Y}\right|_{IS} = \frac{S_{YD}}{I_r} < 0$$

LM: haciendo que sólo en (7) cambie la tasa de interés y el nivel de producción se tiene la siguiente expresión en el plano (di, dy), en este caso positiva:

$$\left.\frac{\delta i}{\delta Y}\right|_{IS} = -\frac{L_Y}{L_i} > 0$$

Expresando (5) y (6) en su forma matricial:

(7) $$\begin{pmatrix} -S_{YD} & I_r \\ L_Y & L_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta Y \\ \delta i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{M}{P^2} & \dfrac{1}{P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta G \\ \delta \pi^e \\ \delta P \\ \delta M \end{pmatrix}$$

CONDICIONES DE ESTABILIDAD

En general, si se tiene una matriz J:

(8) $$\left[J\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_{YD} & I_r \\ L_Y & L_i \end{pmatrix}$$

Las condiciones de estabilidad son:

(9) $$i) \quad \text{Det.J} = \left| J \right| > 0$$

(10) $$ii) \quad Tr\left[J\right] < 0$$

$$iii)\quad \left|a_{11}\right| < 0$$

(11) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$

En este modelo se cumplen tales condiciones:

(12) $i)\quad \text{Det.J} = -S_{YD}L_i - I_r L_Y > 0$

(13) $ii)\quad Tr\left[J\right] = -S_{YD} + L_i < 0$

Lo cual implica:

(14) $\left.\dfrac{S_{YD}}{I_r}\right|_{IS} < -\left.\dfrac{L_Y}{L_i}\right|_{LM}$

Como ambas expresiones son las respectivas pendientes de la IS y la LM, nos dice que para que el modelo sea estable la pendiente de la LM debe ser mayor a la de la IS con lo cual debemos descartar teóricamente el caso de la trampa de la inversión ¿Porqué?:

DONDE:

Y : Nivel de producción.

C : Consumo.

i : Tasa de rendimiento de los bonos (tasa de interés).

I : Inversión.

P : Nivel de precios nacionales.

G : Gasto público total.

M^s : Emisión primaria.

Π^e : Inflación esperada.

Además:

Y_X : Simboliza la forma genérica de la derivada parcial de la variable Y respecto a la variable X.

Es decir.

$0<C_{YD}<1$: Propensión marginal a consumir.

$0<S_{YD}<1$: Propensión marginal al ahorro.

$-1<T_y<0$: Tasa marginal de impuestos.

$C_{YD}(1- T_y) + S_{YD} =1$

$I_r \leq 0$: Sensibilidad de la inversión respecto a la tasa de interés real.

$-\infty \leq L_i \leq 0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés nominal.

$L_y > 0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto al nivel de producción.

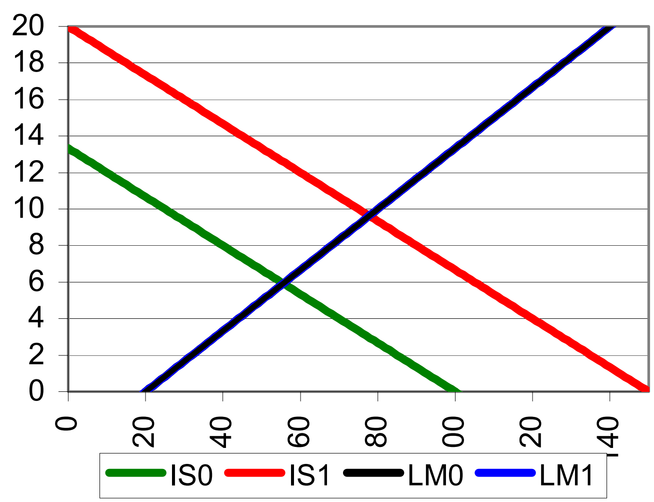
ESTÁTICA COMPARATIVA

$$(15)\begin{pmatrix}\delta Y\\ \delta i\end{pmatrix}=\frac{1}{|J|}\begin{pmatrix}L_i & -I_r\\ -L_Y & -S_{YD}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & I_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{M}{P^2} & \frac{1}{P}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta G\\ \delta\pi^e\\ \delta P\\ \delta M\end{pmatrix}$$

A) Política fiscal expansiva

$$(16)\frac{\delta Y}{\delta G}=\frac{-L_i}{-S_{YD}L_i-I_rL_Y}>0 \qquad \frac{\delta i}{\delta G}=\frac{L_Y}{-S_{YD}L_i-I_rL_Y}>0$$

MODELO IS LM



Caso especiales:

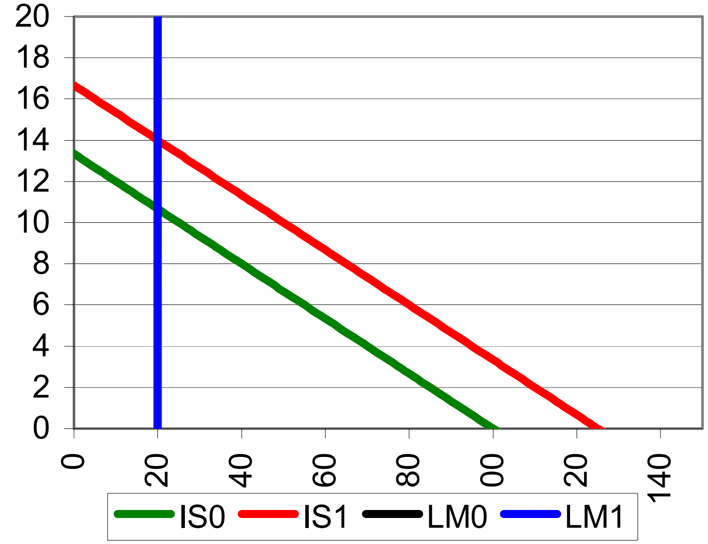
CASO CLÁSICO (LM vertical)

$L_i=0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés nominal.

$$\frac{\delta Y}{\delta G} = 0$$

(17) $$\frac{\delta i}{\delta G} = -\frac{1}{I_r} > 0$$

MODELO IS LM



CASO KEYNESIANO EXTREMO (LM HORIZONTAL)

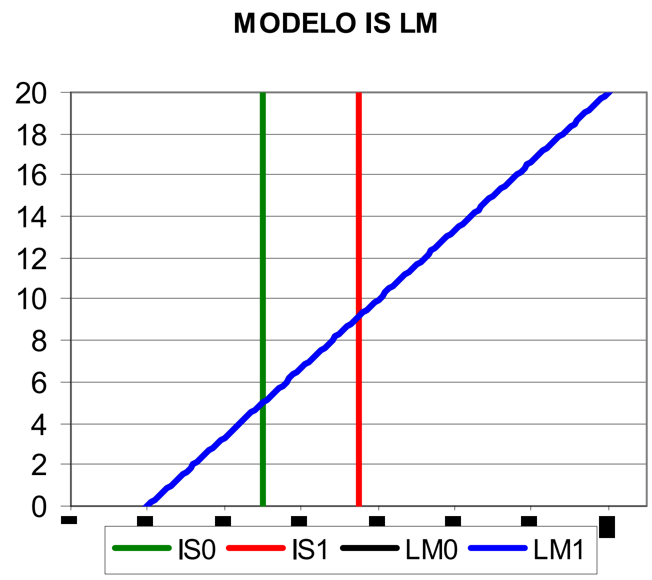
$L_i \to -\infty$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés nominal.

$$(18)\ \frac{\delta Y}{\delta G} = \frac{1}{S_{YD}} > 1 \qquad \frac{\delta i}{\delta G} = 0$$

CASO DE LA TRAMPA DE LA INVERSIÓN (IS VERTICAL)

$I_r = 0$: Sensibilidad de la inversión respecto a la tasa de interés real.

$$(19)\ \frac{\delta Y}{\delta G} = \frac{1}{S_{YD}} > 1 \qquad \frac{\delta i}{\delta G} = -\frac{L_Y}{S_{YD} L_i} > 0$$



Nótese que en el casó keynesiano extremo al igual que el de la trampa de la inversión una misma política fiscal tiene igual efecto sobre el producto. Pero este caso no es dable dado que no cumple con las condiciones de estabilidad pues la IS en esta situación tiene pendiente infinita la cual obviamente es mayor a la LM violando la condición de estabilidad antes derivada.

B) Política monetaria expansiva

$$(20)\ \frac{\delta Y}{\delta M} = \frac{-I_r}{P\left(-S_{YD}L_i - I_r L_Y\right)} > 0 \qquad \frac{\delta i}{\delta M} = \frac{-S_{YD}}{P\left(-S_{YD}L_i - I_r L_Y\right)} < 0$$

CASO CLÁSICO (LM vertical)

$L_i=0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés nominal.

$$(22)\ \frac{\delta Y}{\delta M} = \frac{1}{PL_Y} > 0 \qquad \frac{\delta i}{\delta M} = \frac{S_{YD}}{PI_r L_Y} < 0$$

Comparando el efecto de las políticas fiscales y monetarias en el caso clásico se desprende que lo que importa es el dinero como decía Friedman.

DERIVACIÓN DE LA DEMANDA AGREGADA

(23) $$\left|J\right|\delta Y = -L_i\delta G + L_i I_r \delta\pi^e + \frac{I_r M}{P^2}\delta P - \frac{I_r}{P}\delta M$$

Despejando dP

(24) $$\delta P = \left|J\right|\frac{P^2}{I_r M}\delta Y + \frac{P^2 L_i}{I_r M}\delta G - \frac{P^2 L_i}{M}\delta\pi^e + \frac{P}{M}\delta M$$

Pendiente de la demanda agregada bajo condiciones normales:

$$\left.\frac{\delta P}{\delta Y}\right|_{DA} = \left|J\right|\frac{P^2}{I_r M} < 0$$

(25) $$\left.\frac{\delta P}{\delta Y}\right|_{DA} = \left|-S_{YD}L_i - I_r L_Y\right|\frac{P^2}{I_r M}$$

Cualitativamente: (26) $$P = P\left(\underset{-}{Y}, \underset{+}{G}, \underset{+}{M}, \underset{+}{\pi^e}, \ldots\right)$$

Profecía autocumplida: “cuando los agentes esperan una mayor inflación CETERIS PARIBUS, el nivel de precios aumenta”.

MODELO IS LM DINÁMICO CON PRECIOS FIJOS

(27) $\dot{y} = \alpha\left(y^d - y\right) \quad \alpha > 0$

(28) $\dot{i} = \beta\left(L^d - L^s\right) \quad \beta > 0$

(29) $y^d = cy + g - bi$

(30) $L^d = ky - hi$

(31) $L^s = m - p$

Donde:

$\alpha > 0$: Velocidad de ajuste del nivel de producción respecto a la demanda excedente en el mercado de bienes.
$\beta > 0$: Velocidad de ajuste de la tasa de interés respecto a la demanda excedente en el mercado de monetario.

y : Nivel de producción.
i : Tasa de rendimiento de los bonos (tasa de interés).
p : Nivel de precios nacionales.
g : Gasto público total.

m : Emisión primaria.

$0<c<1$: Propensión marginal a consumir.
$-b<0$: Sensibilidad de la inversión respecto a la tasa de interés real.
$-\infty \leq -h \leq 0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés nominal.
$k>0$: Sensibilidad de la demanda de dinero respecto al nivel de producción.

$s = 1-c$: Propensión marginal al ahorro.

Estado estacionario

(32) $\dot{y} = \dot{i} = 0$

(33) $(c-1)y - bi = -g$

(34) $ky - hi = m - p$

(35) $\begin{bmatrix} -s & -b \\ k & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ m-p \end{bmatrix}$

(36) $\begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{sh+bk} \begin{bmatrix} -h & b \\ -k & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g \\ m-p \end{bmatrix}$

DINÁMICA

(37) $\dot{y} = \alpha\left(-sy + g - bi\right)$

(38) $\dot{i} = \beta\left(ky - hi - m + p\right)$

En su formulación de brazo estable se puede comprobar:

(39) $\dot{y} = -\alpha s\left(y - \overline{y}\right) - \alpha b\left(i - \overline{i}\right)$

(40) $\dot{i} = \beta k\left(y - \overline{y}\right) - \beta h\left(i - \overline{i}\right)$

Matricialmente:

(41) $\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha s & -\alpha b \\ \beta k & -\beta h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - \overline{y} \\ i - \overline{i} \end{bmatrix}$

CONDICIONES DE ESTABILIDAD

(42) $i)\quad \text{Det.J} = \left|J\right| > 0$

(43) $ii)\quad Tr\left[J\right] < 0$

En este modelo se cumplen tales condiciones:

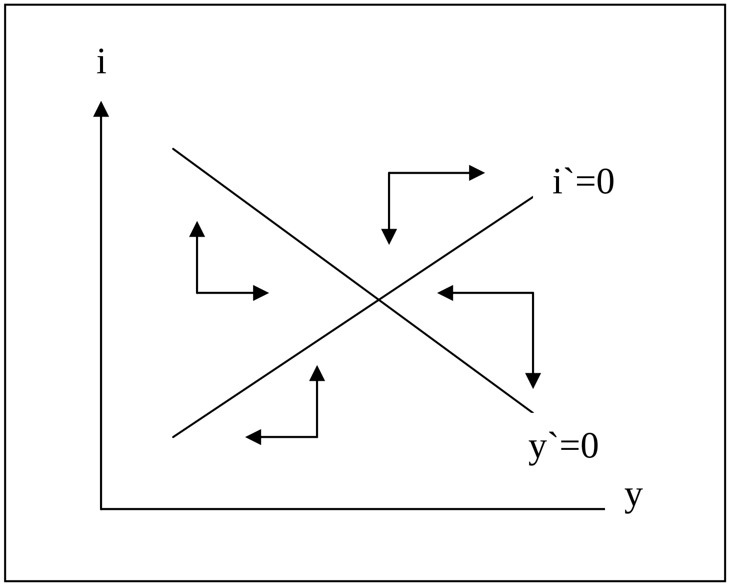
$i)\quad \mathrm{Det.J} = \alpha\beta\left(sh + bk\right) > 0$

$ii)\quad Tr\left[J\right] = -\alpha s - \beta h < 0$

El diagrama de fases:

(44) $\dfrac{\delta \dot{y}}{\delta y} = -\alpha s < 0$

(45) $\dfrac{\delta \dot{i}}{\delta i} = -\beta h < 0$



Para simplificar la solución asumiré que el mercado monetario siempre se encuentra en equilibrio $\beta \to \infty$.

DINÁMICA

Despejando la tasa de interés en el mercado monetario y reemplazando en (37).

(46) $$\dot{y} = \alpha\left(\left(-s-\frac{b}{h}k\right)y + g + \frac{b}{h}(m-p)\right)$$

(47) $$\dot{y} - \alpha\left(-s-\frac{b}{h}k\right)y = \alpha\left(g + \frac{b}{h}(m-p)\right)$$

Senda temporal del nivel de producción:

(48) $$y(t) = \left(y(0) - \overline{y}\right)e^{\alpha\left(-s-\frac{b}{h}k\right)t} + \overline{y}$$

Condición de estabilidad dinámica

(49) $$\alpha\left(-s-\frac{b}{h}k\right)<0$$

Dado que α es positivo la condición suficiente y necesaria para la convergencia al equilibrio es: $-\left.\frac{s}{b}\right|_{IS}<\left.\frac{k}{h}\right|_{LM}$

La pendiente de la LM debe ser mayor a la de la IS.

La senda para la tasa de interés es la siguiente:

(50) $$i(t)=\frac{k}{h}y(t)-\frac{1}{h}m+\frac{1}{h}p$$

Ejercicios de dinámica.

a) Dinámica con una política fiscal expansiva

Velocidades de ajuste

α	**0.35**
β	**infinito**

Parámetros

b	**1.1**
c	**0.8**
h	**1**
k	**0.5**

Variables de control:

g	**10**
m	**5**

Variable exógena:

p	**1**

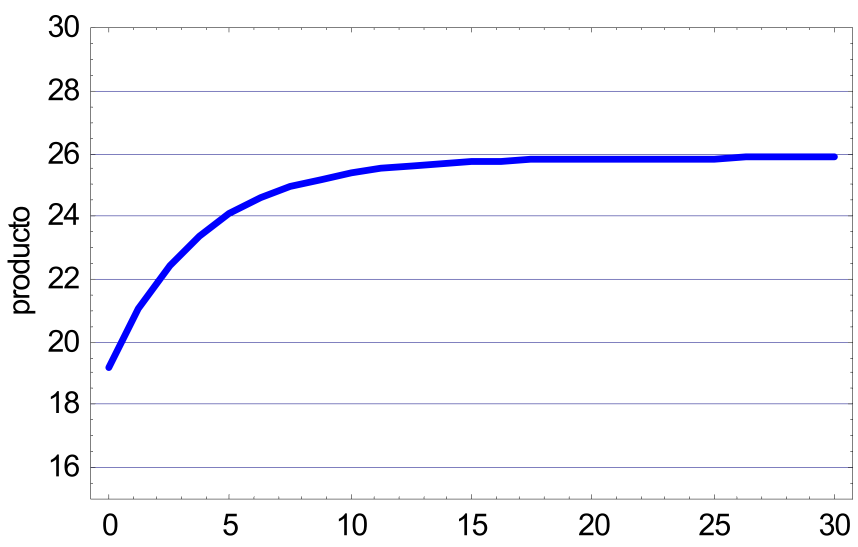
Equilibrio inicial:

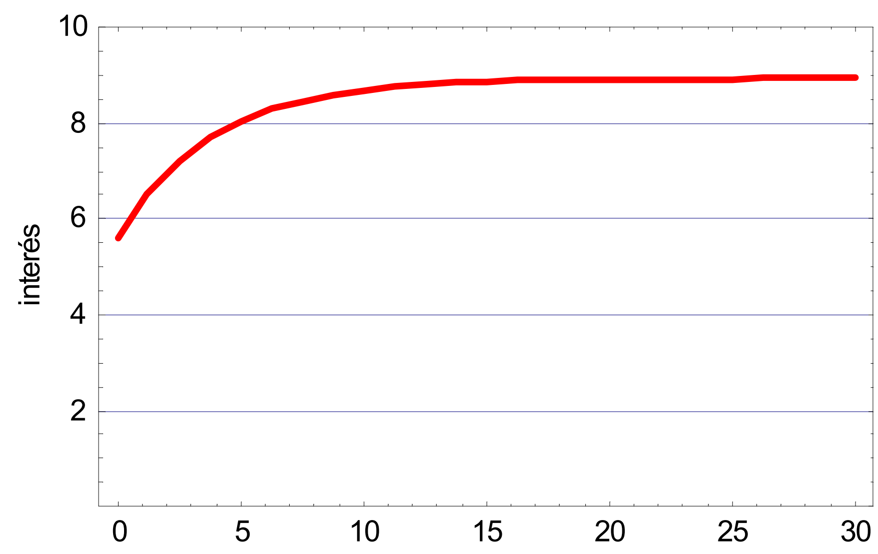
y	**19.2**
i	**5.6**

A) Dinámica cuando g aumenta a 15:
Nuevo estado estacionario:

y	**25.8666667**
i	**8.93333333**

Dinámica:





B) Dinámica con una política monetaria expansiva

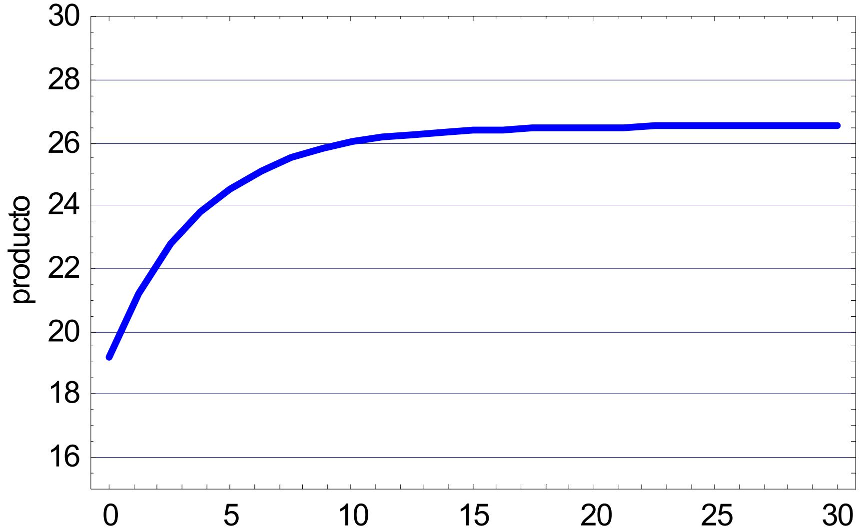
Las mismas velocidades de ajuste del ejercicio anterior sólo que esta vez m aumenta de 5 a 10 CETERIS PARIBUS.

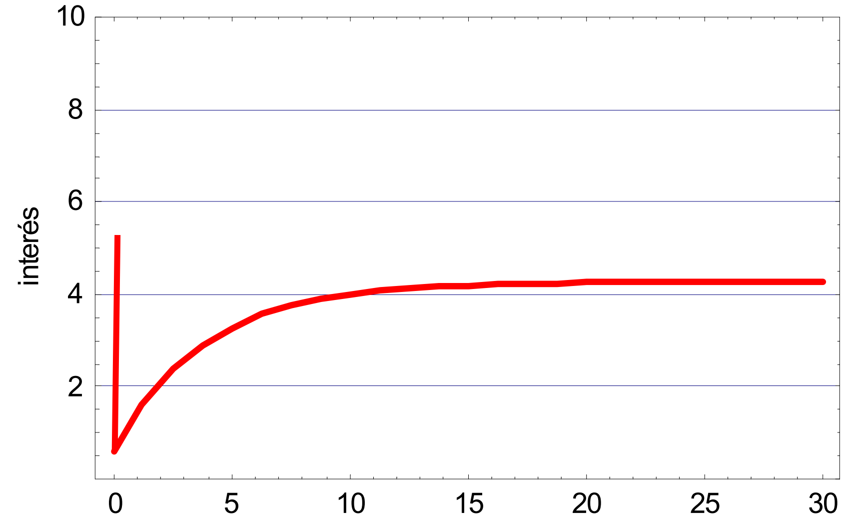
Equilibrio inicial:

y	**19.2**
i	**5.6**

Nuevo estado estacionario:

y	**26.5333333**
i	**4.26666667**





Nótese la sobrereacción de la tasa de interés

MODELO IS LM DINÁMICO CON PRECIOS FLEXIBLES

En el modelo anterior asumimos que el nivel de precios era exógeno pero en la realidad no es así, los modelos incorporaron la curva de Phillips que en el sistema ingresa a través de la oferta agregada dinámica.
Con fines de simplificación asumiré que el equilibrio ahorro-inversión es continuo al igual que en el mercado monetario.

(51) $\dot{p} = \lambda\left(y - \overline{y}\right) \quad \lambda > 0$

(52) $\dot{y} = \alpha\left(y^{d} - y\right) \quad \alpha \to \infty$

(53) $\dot{i} = \beta\left(L^{d} - L^{s}\right) \quad \beta \to \infty$

(54) $y^{d} = cy + g - bi$

(55) $L^{d} = ky - hi$

(56) $L^{s} = m - p$

Estado estacionario: (57) $\dot{p} = \dot{y} = \dot{i} = 0$

(58) $y = \bar{y}$

Dinámica:

En este caso se forma una ecuación diferencial de primer orden, cuya forma de solución es bastante conocida, reemplazando (36) en (51), teniendo en cuenta que (36) en este caso no es solución pues esta en función de los precios, que dentro de este modelo es variable endógena.

$$y = \frac{h}{sh+bk}g + \frac{b}{sh+bk}m - \frac{b}{sh+bk}p$$

(36) $$i = \frac{k}{sh+bk}g - \frac{s}{sh+bk}m + \frac{s}{sh+bk}p$$

(59) $$\dot{p} + \frac{\lambda b}{sh+bk}p = \lambda\left(\frac{h}{sh+bk}g + \frac{b}{sh+bk}m - \bar{y}\right)$$

Equilibrio en precios:

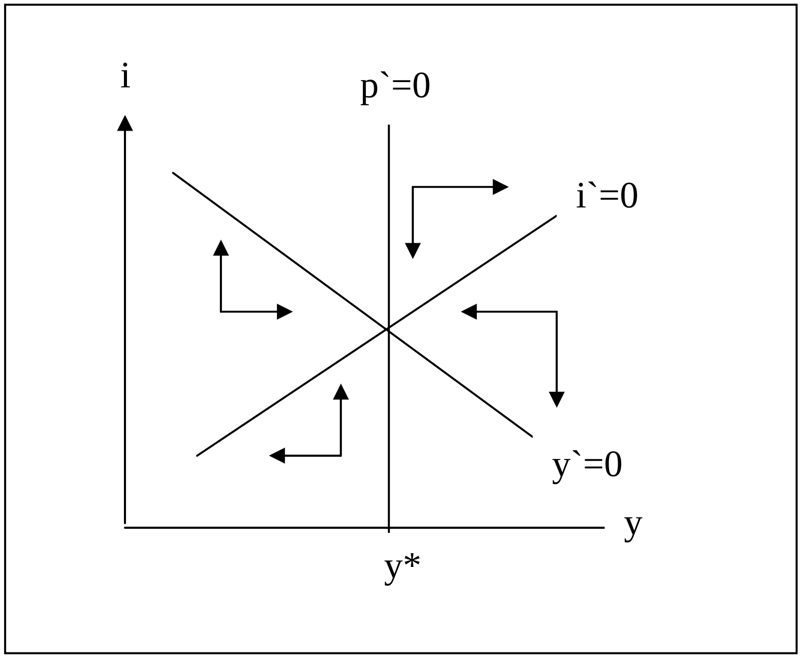
(60) $$\bar{p} = \frac{h}{b}g + m - \frac{sh+bk}{b}\bar{y}$$

Senda temporal del nivel de precios:

(61) $$p(t) = \left(p(0) - \overline{p} \right) e^{-\frac{\lambda b}{sh+bk}t} + \overline{p}$$

Condición de estabilidad: (62) $\frac{k}{h} \succ -\frac{s}{b}$

Otra vez la pendiente de la LM debe ser mayor de la IS



Ejercicios de dinámica:
Política fiscal expansiva
Velocidades de ajuste

λ	**0.4**
α	**infinito**
β	**infinito**

Parámetros

b	**1.1**
c	**0.8**
h	**1.0**
k	**0.5**
s	**0.2**

Variables de control:

g	**20**
m	**10**

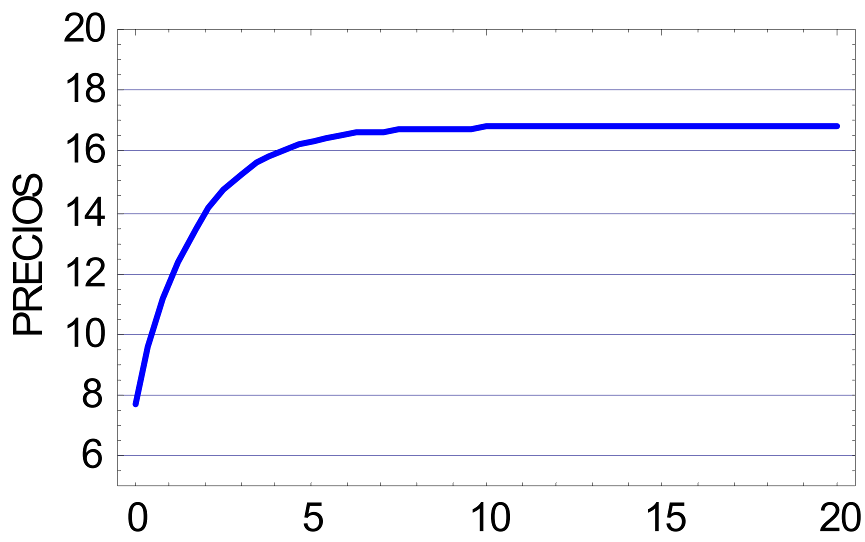
Variable exógena:

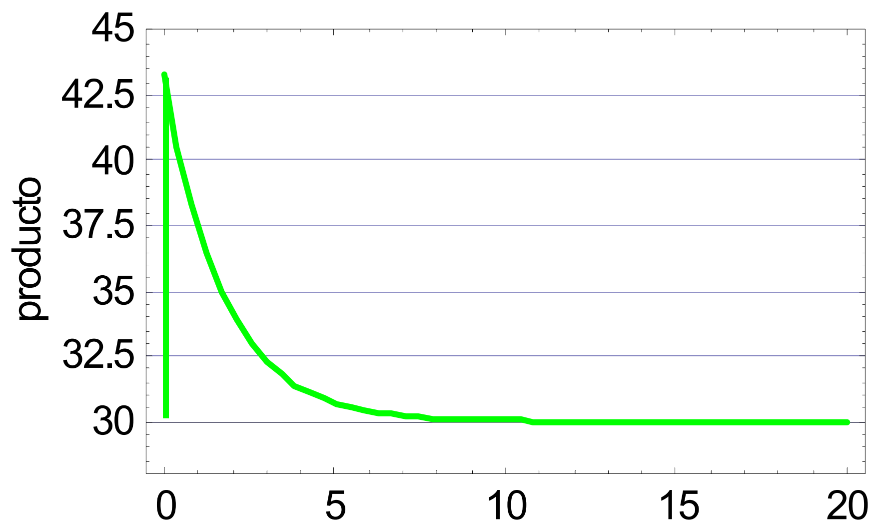
y*	**30**

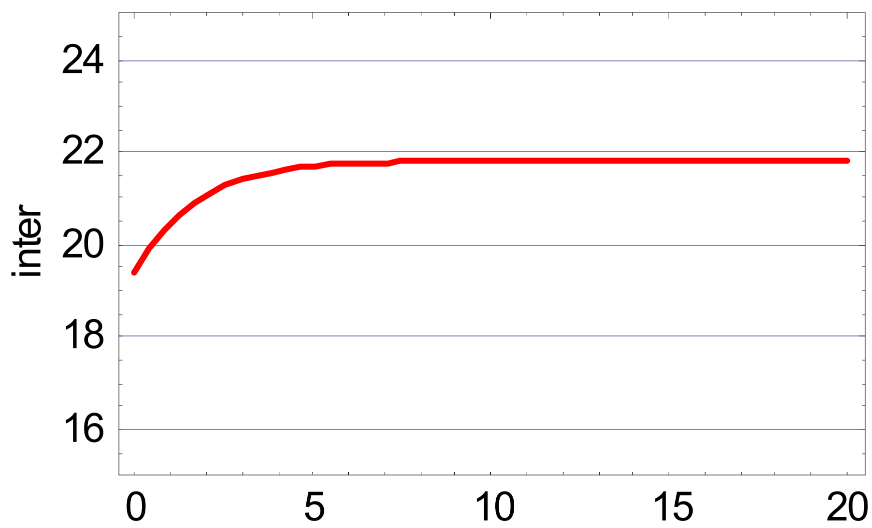
Equilibrio inicial:

p	**7.73**
y	**30.00**
i	**12.73**

A) Dinámica cuando g aumenta a 30:




45
42.5
40
37.5
35
32.5
30
producto
0
5
10
15
20


24
22
20
18
16
inter
0
5
10
15
20

Nuevo estado estacionario:

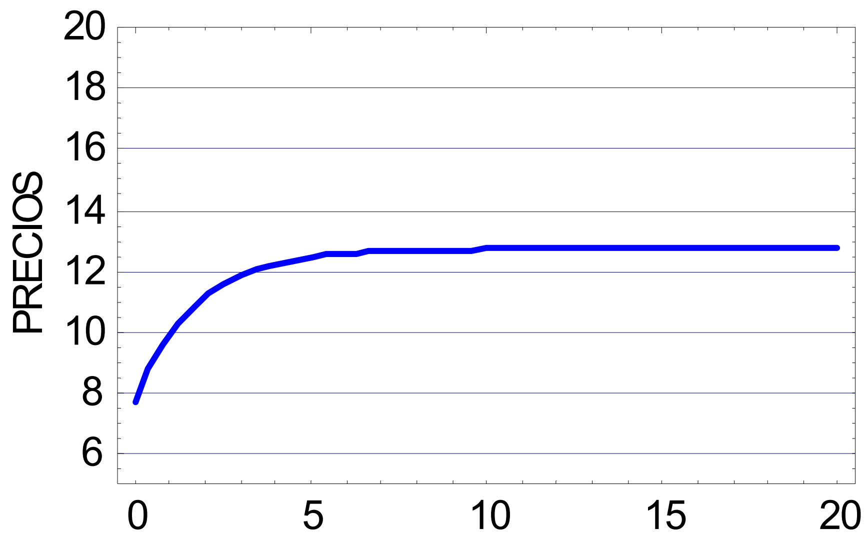
p	**16.82**
y	**30.00**
i	**21.82**

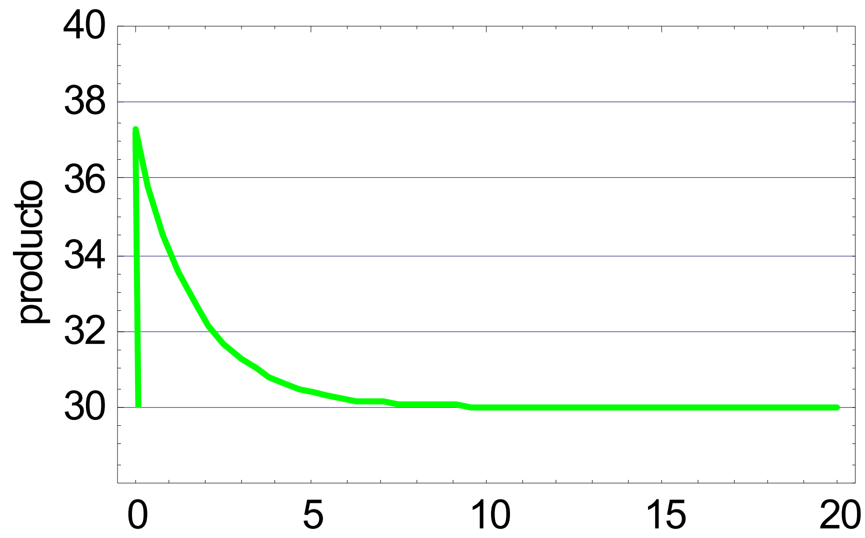
B) Con los mismos datos del ejercicio anterior sólo que esta vez m pasa de 10 a 15:

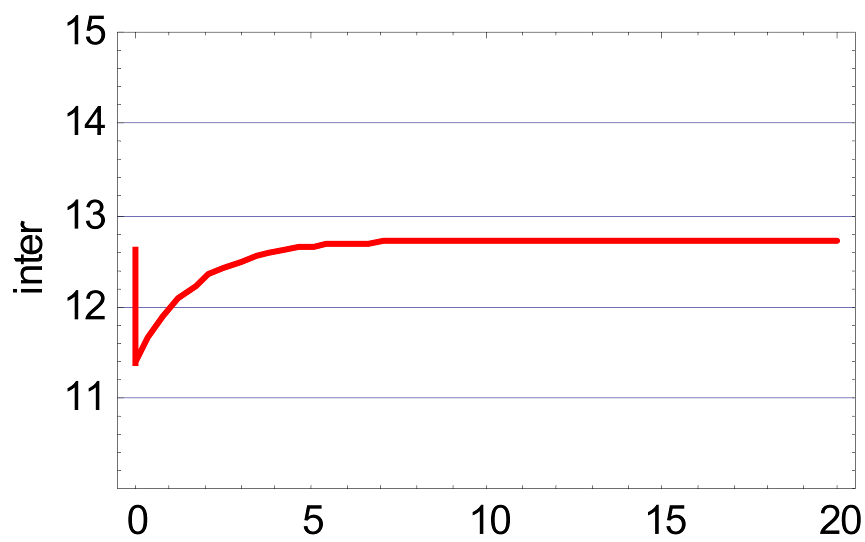
Nuevo estado estacionario:

p	**12.73**
y	**30.00**
i	**12.73**

Dinámica:



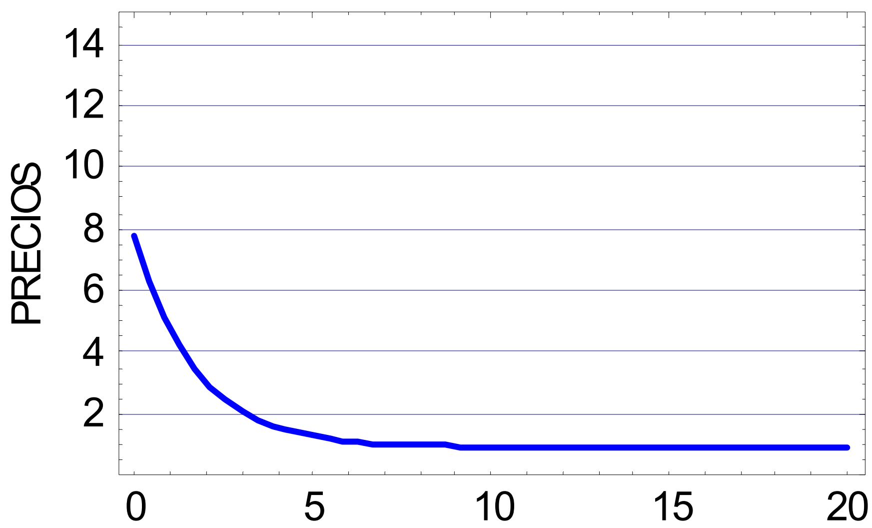

40
38
36
34
32
30
producto
0
5
10
15
20

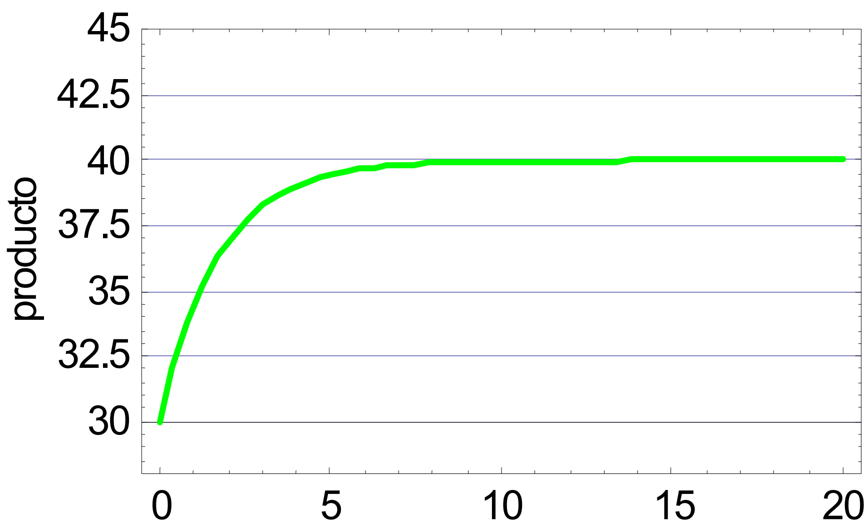

15
14
13
12
11
inter
0
5
10
15
20

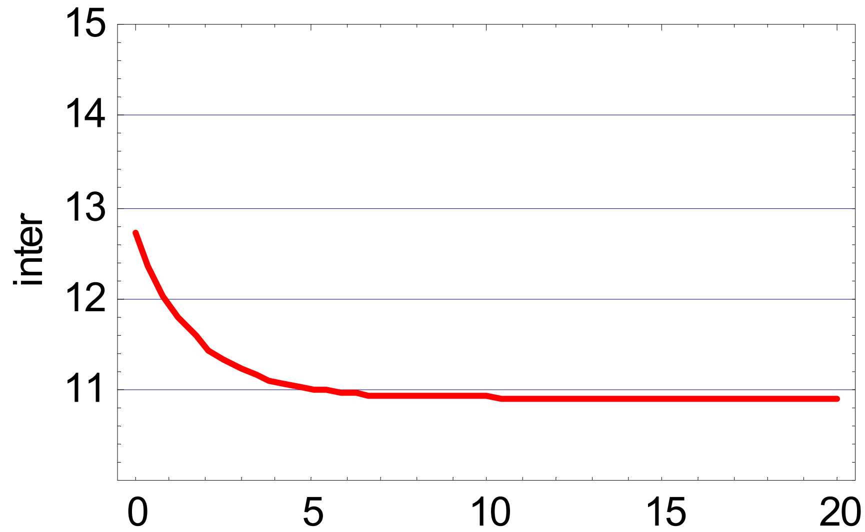
C) Con los mismos datos del ejercicio anterior sólo que esta vez aumenta el nivel de producción potencial a 40 CETERIS PARIBUS:

Nuevo equilibrio:

p	**0.91**
y	**40.00**
i	**10.91**




producto
45
42.5
40
37.5
35
32.5
30
0
5
10
15
20


inter
15
14
13
12
11
0
5
10
15
20