

1. Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad [1.1]$$

se dice exacta si la expresión del lado izquierdo es el diferencial total o exacto

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad [1.2]$$

de alguna función $u(x, y)$. Entonces, la ecuación diferencial [1.1] puede ser escrita

$$du = 0$$

Mediante integración directa, se puede obtener la solución general de [1.1] de la forma

$$u(x, y) = c \quad [1.3]$$

Comparando [1.1] y [1.2] se puede observar que [1.1] es exacta, si existe alguna función $u(x, y)$ tal que

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad (b) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad [1.4]$$

Suponiendo que M y N están definidas y posean derivadas parciales de primer orden continuas en una región del plano x, y cuyo borde es una curva cerrada que no se intersecte a si misma, esto es, la región definida no posee puntos internos que no pertenezcan a la región. Luego, de [1.4]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Por la suposición de continuidad, las derivadas segundas son iguales, por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad [1.5]$$

Esta condición es necesaria y suficiente para que $Mdx + Ndy$ sea un diferencial total.

Si [1.1] es exacta, la función $u(x, y)$ puede ser encontrada a partir de [1.4a] por integración con respecto a x

$$u(x, y) = \int M dx + k(y) \quad [1.6]$$

en esta integración y funge como una constante y $k(y)$ juega el rol de una “constante de integración”. Para determinar $k(y)$, se deriva $\partial u / \partial y$ de [1.6], se usa [1.4b] para obtener dk/dy y se integra.

Se puede llegar al mismo resultado, usando [1.4b] en lugar de [1.4a]

$$u(x, y) = \int N dy + l(x) \quad [1.6*]$$

Para determinar $l(x)$, se deriva $\partial u / \partial x$ de [1.6*], se usa [1.4a] para obtener dl/dx y se integra.

Ejemplo 1.1:

Resolver

$$xy' + y + 4 = 0$$

Se debe escribir la ecuación de la forma [1.1], esto es

$$(y + 4)dx + xdy = 0$$

Se puede observar que $M = y + 4$ y $N = x$, por lo tanto [1.5] se cumple, esto es, $\partial M / \partial y = 1 = \partial N / \partial x$, de manera que la ecuación es exacta. De [1.6*]

$$u = \int N dy + l(x) = \int x dy + l(x) = xy + l(x)$$

Para determinar $l(x)$, hay que diferenciar esta fórmula con respecto a x y usar [1.4a], encontrando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dl}{dx} = M = y + 4$$

Por lo tanto $dl/dx = 4$ y $l = 4x + c^*$. De aquí se puede obtener la solución general de la ecuación diferencial en la forma de

$$u = xy + l(x) = xy + 4x + c^* = ctte$$

o lo que es lo mismo

$$y = \frac{c}{x} - 4$$

2. Factores Integrantes

Algunas veces una ecuación diferencial dada con la forma siguiente

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad [2.1]$$

no es una ecuación exacta, pero puede convertirse en este tipo, multiplicando por una función adecuada $F(x, y) \neq 0$. Esta función se llama el **factor integrante** de [2.1]. Este factor integrante puede ser hallado mediante inspección, pero en algunos casos importantes, los factores integrantes pueden ser hallados de una manera sistemática, que será ilustrado a continuación

Ejemplo 2.1

Resolver

$$xdy - ydx = 0$$

La ecuación diferencial no es exacta. Un factor integrante es $F = 1/x^2$, obteniéndose

$$F(x)(xdy - ydx) = \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad y = cx$$

Teorema 2.1

Si [2.1] no es exacta y posee una solución general $u(x, y) = c$, entonces existe al menos un factor integrante de [2.1]

Prueba: Diferenciando $u(x, y) = c$, se tiene

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

Comparando esta y [2.1] se puede observar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} = P : Q$$

debe cumplirse idénticamente, de aquí que exista una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = FP, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = FQ$$

Usando estas expresiones para $\partial u / \partial x$ y $\partial u / \partial y$, se tiene

$$du = FPdx + FQdy = F(Pdx + Qdy) \quad [2.2]$$

lo que muestra que F es un factor integrante de [2.1]. Lo que es mas, la multiplicación de [2.2] por una función $H(u)$ da la expresión

$$H(u)F(Pdx + Qdy) = H(u)du$$

que es una expresión exacta. De aquí que $H(u)F(x, y)$ es otro factor integrante y dado que $H(u)$ es arbitraria, existe infinitos factores integrantes de [2.1].

Ejemplo 2.2:

Encuentre factores integrantes de $xdy-ydx=0$ (ver ejemplo 1). Dado que

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2}, \quad d\left(\ln \frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}, \quad d\left(\arctan \frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

las funciones $1/y^2$, $1/xy$, $1/(x^2 + y^2)$ corresponden a dichos factores. Las correspondientes soluciones son

$$\frac{x}{y} = c, \quad \ln \frac{x}{y} = c, \quad \arctan \frac{x}{y} = c$$

son esencialmente las mismas soluciones, ya que corresponden a rectas que pasan por el origen.

3. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si puede ser escrita como

$$y' + f(x)y = r(x) \quad [3.1]$$

$f(x)$ y $r(x)$ pueden ser funciones cualesquiera, lo importante es que, con respecto a y y y' , la ecuación sea lineal.

Si $r(x) \equiv 0$ se dice que la ecuación es homogénea, de lo contrario la ecuación será no homogénea.

Para hallar la solución de la homogénea, se hace $r(x) \equiv 0$, quedando [3.1] de la siguiente forma:

$$y' + f(x)y = 0 \quad [3.2]$$

Por separación de variables se tiene

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx \text{ por tanto } \ln|y| = -\int f(x)dx + k$$

o

$$y(x) = Ke^{-\int f(x)dx} \quad \text{con} \quad K = \begin{cases} e^k & \text{cuando } y > 0 \\ -e^k & \text{cuando } y < 0 \end{cases} \quad [3.3]$$

Para resolver la ecuación no homogénea [3.1], esta se puede escribir como

$$(fy - r)dx + dy = 0$$

Se puede encontrar un factor integrante $F(x)$, que depende solamente de x . Si tal factor existe, entonces

$$F(x)(fy - r)dx + F(x)dy = 0$$

debe ser exacto. Ahora, para esta ecuación, la condición de continuidad en las derivadas, asume la forma

$$\frac{\partial}{\partial y}[F(fy - r)dx] = \frac{dF}{dx} \quad \text{o} \quad Ff = \frac{dF}{dx}$$

Por separación de variables se tiene $f dx = \frac{dF}{F}$. Integrando, da

$$\ln|F| = \int f(x)dx$$

de aquí que

$$F(x) = e^{h(x)} \quad \text{donde} \quad h(x) = \int f(x)dx$$

Esto muestra que $F(x)$ es un factor integrante de [1]. Multiplicando este factor en [3.1], se encuentra

$$e^h (y' + fy) = e^h r$$

Como $h' = f$, esta puede ser escrita

$$\frac{d}{dx}(ye^h) = e^h r$$

Integrando ambos miembros, se tiene

$$ye^h = \int e^h r dx + c$$

Dividiendo ambos lados por e^h , se obtiene la fórmula deseada

$$y(x) = e^{-h} [\int e^h r dx + c], \quad h = \int f(x) dx \quad [3.4]$$

la cual representa la solución general de [3.1], en la forma de una integral.

Ejemplo 3.1

Resolver la ecuación diferencial

$$y' - y = e^{2x}$$

Por inspección, se puede obtener

$$f = -1, \quad r = e^{2x}, \quad h = \int f dx = -x$$

y de [3.4] se obtiene la solución general

$$y(x) = e^x [\int e^{-x} e^{2x} dx + c] = e^x [e^x + c] = ce^x + e^{2x}$$

De manera alternativa, se puede multiplicar la ecuación dada por $e^h = e^{-x}$

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x} e^{-x} = e^x$$

Integrando ambos miembros, se obtiene el mismo resultado anterior

$$ye^{-x} = e^x + c \text{ de donde } y = e^{2x} + ce^x$$

Ejemplo 3.2

Resolver la ecuación diferencial

$$xy' + y + 4 = 0$$

Escribiendo esta ecuación en la forma de [3.1], se tiene

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}$$

y, por lo tanto

$$f = \frac{1}{x}, \quad r = \frac{-4}{x}, \quad h = \int f dx = \ln|x|, \quad e^h = x, \quad e^{-h} = \frac{1}{x}$$

De esto y de [3.4] se obtiene la solución general

$$y(x) = \frac{1}{x} \left[\int x \left(\frac{-4}{x} \right) dx + c \right] = \frac{c}{x} - 4$$

Que está de acuerdo a lo obtenido en el ejemplo de la sección 1

Ejemplo 3.3

Resolver el problema de valor inicial

$$y' + y \tan(x) = \sin(2x), \quad y(0) = 1$$

Aquí $f = \tan(x)$, $r = \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Y

$$h = \int f dx = \int \tan(x) dx = \ln|\sec(x)|$$

De esto y de [3.4]

$$e^h = \sec(x), \quad e^{-h} = \cos(x), \quad e^h r = 2 \sin(x)$$

La solución general de la ecuación es

$$y(x) = \cos(x) \left[2 \int \sin(x) dx + c \right] = c \cos(x) - 2 \cos^2(x)$$

De acuerdo a la condición inicial, $y=1$ cuando $x=0$, por lo tanto

$$1 = c - 2 \therefore c = 3$$

La solución final es

$$y(x) = 3 \cos(x) - 2 \cos^2(x)$$

4. Aplicaciones a circuitos eléctricos

La resolución de circuitos eléctricos que involucran resistencias y condensadores o resistencias e inductancias, conlleva al planteamiento de una ecuación diferencial del tipo [3.1]. Usando el basamento desarrollado anteriormente y las Leyes e Kirchhoff de tensión y corriente, resulta fácil obtener un resultado general para estos circuitos.

Circuitos con resistencias y condensadores

Dado el circuito de la figura 4.1

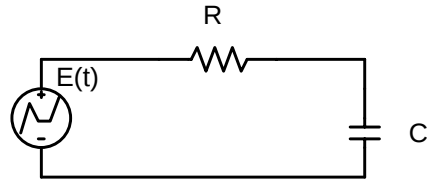


Figura 4.1: circuito simple RC

se quiere calcular la tensión sobre el condensador. Aplicando la Ley de Kirchhoff de tensión, se tiene

$$E(t) = Ri(t) + V_c(t) \quad [4.1]$$

Pero dado que $i(t) = C dV_c(t)/dt$, se puede escribir [4.1] como

$$E = RC \frac{dV_c}{dt} + V_c \text{ o de otra manera } V_c' + \frac{1}{RC} V_c = \frac{E}{RC} \quad [4.2]$$

Esta última expresión está en la forma de [3.1], por lo que se puede encontrar por simple inspección los factores

$$f = \frac{1}{RC}, \quad r = \frac{E}{RC}, \quad h = \int f dt = \frac{t}{RC}, \quad e^h = e^{t/RC}, \quad e^{-h} = e^{-t/RC}$$

Sustituyendo en [3.4] ($y(x) = e^{-h} [\int e^h r dx + c]$, $h = \int f(x) dx$), se tiene

$$V_c(t) = e^{-t/RC} [\int e^{t/RC} \frac{E(t)}{RC} dt + c] = e^{-t/RC} \int e^{t/RC} \frac{E(t)}{RC} dt + ce^{-t/RC} \quad [4.3]$$

que representa la fórmula general para la solución de un sistema RC de primer orden.

Observando [4.3], inmediatamente se puede inferir que el término de la derecha $ce^{-t/RC}$ corresponde a la solución del sistema de primer orden $RC dV_c/dt + V_c = 0$, mientras que el otro término de [4.3] corresponde a la contribución de la parte forzante $E(t)$ a la ecuación diferencial.

Casos especiales

- $E(t) = E_0 u(t)$

Dado que $u(t)$ esta definida de la siguiente forma

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

hay que aplicar [4.3] dos veces

Caso $t < 0$

Dado que $u(t)$ vale cero desde menos infinito hasta cero, la parte izquierda de [4.3] vale 0 estrictamente y la derecha vale cero igualmente debido al decaimiento exponencial, por lo tanto para $t < 0$, $V_c = 0$.

Caso $t > 0$

En este caso, [4.3] puede describirse como

$$V_c(t) = e^{-t/RC} \int e^{t/RC} \frac{E_0}{RC} dt + ce^{-t/RC} = \frac{e^{-t/RC}}{RC} RCE_0 e^{t/RC} + ce^{-t/RC}$$

o lo que es lo mismo

$$V_c(t) = E_0 + ce^{-t/RC}$$

pero dado que para $t=0$, $V_c=0$, se tiene

$$0 = E_0 + c \therefore c = -E_0$$

luego, la solución total es

$$V_c(t) = E_0(1 - e^{-t/RC})$$

- $E(t) = E_0 e^{at}$

En este caso, los factores necesarios para evaluar [4.3] son los siguientes

$$f = \frac{1}{RC}, \quad r = \frac{E_0 e^{at}}{RC}, \quad h = \int f dt = \frac{t}{RC}, \quad e^h = e^{t/RC}, \quad e^{-h} = e^{-t/RC}$$

luego, [4.3] puede describirse como

$$V_c(t) = e^{-t/RC} \int e^{t/RC} \frac{E_0 e^{at}}{RC} dt + ce^{-t/RC} = e^{-t/RC} \frac{E_0}{RC} \int e^{t\left(\frac{1}{RC} + a\right)} + ce^{-t/RC}$$

dando como resultado

$$V_c(t) = e^{-t/RC} e^{t\left(\frac{1}{RC}+a\right)} \frac{1}{\frac{1}{RC}+a} \frac{E_0}{RC} + c e^{-t/RC} = \frac{E_0}{RC} \frac{RC}{1+aRC} e^{t\left(\frac{1}{RC}+a-\frac{1}{RC}\right)} + c e^{-t/RC} = \frac{E_0}{1+aRC} e^{at} + c e^{-t/RC}$$

Si para $t=0$, $V_c=0$, entonces

$$0 = \frac{E_0}{1+aRC} + c \therefore c = -\frac{E_0}{1+aRC}$$

dando como resultado

$$V_c(t) = \frac{E_0 e^{at}}{1+aRC} - \frac{E_0}{1+aRC} e^{-t/RC} = \frac{E_0}{1+aRC} \left(e^{at} - e^{-t/RC} \right)$$

5. Ecuaciones Diferenciales Lineales Ordinarias

5.1. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Segundo Orden

Una ecuación diferencial de segundo orden es aquella que posee derivadas segundas en su descripción; así mismo, se dice que es lineal si puede ser escrita de la siguiente forma

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x) \quad [5.1]$$

donde las funciones f y g en se conocen como los coeficientes de la ecuación. La característica de esta ecuación es que es lineal en la variable incógnita y y sus derivadas. Así mismo, f , g y r pueden ser funciones cualesquiera de x . Cuando la función $r(x)$ es idénticamente igual a 0, [5.1] posee propiedades mas simples, de manera que

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad [5.2]$$

En este caso, se dice que la ecuación es homogénea. Si $r(x) \neq 0$, se dice, entonces, que [5.1] es no homogénea. Por ejemplo

$$y'' + 4y' = e^{-x} \sin(x)$$

es una ecuación diferencial no homogénea, mientras que

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

corresponde a una ecuación diferencial homogénea.

Cualquier ecuación diferencial de segundo orden que no pueda ser escrita como [5.1] corresponde a una ecuación no lineal. Las ecuaciones siguientes corresponden a ecuaciones diferenciales no lineales

$$y''y + y' = 0$$

y

$$y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden juegan un rol básico en muchos problemas de ingeniería. Se mostrará que algunas de estas ecuaciones son muy simples porque su solución está conformada por funciones elementales. Otras mas complicadas tienen como solución las funciones de Bessel y funciones hipergeométricas.

Para todas las consideraciones aquí hechas, se supone que x varía en algún rango fijo y arbitrario, por ejemplo, en algún intervalo finito o en todo el eje x . Todas las suposiciones y asertos se referirán a ese rango fijo aún cuando no sea especificados para cada caso.

Una función $y = \phi(x)$ se llama una **solución** de una ecuación diferencial de segundo orden, lineal o no lineal, en algún intervalo, quizá infinito, si $\phi(x)$ está definida y es doblemente integrable en ese intervalo, de tal manera que la ecuación se convierte en una identidad cuando se reemplaza la función no especificada y , y sus derivadas por $\phi(x)$ y sus corres-

pendientes derivadas. Esta definición es análoga al caso estudiado de las ecuaciones diferenciales de primer orden en la sección 1.

Ejemplo 5.1:

Las funciones $y = \cos x$ y $y = \sin x$, son soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + y' = 0$$

para todo x , ya que

$$(\cos x)'' + \cos x' = -\cos x + \cos x = 0$$

Se puede verificar que para $y = \sin x$ sucede lo mismo. Se puede expandir el ejemplo aún mas si se multiplica la primera solución por una constante, por ejemplo 3, la función resultante $y = 3\cos x$ es también una solución ya que

$$(3\cos x)'' + 3\cos x' = 3[-\cos x + \cos x] = 0$$

Es obvio que si en lugar de usar 3, se utiliza cualquier otro número, la solución se mantiene, de hecho, se puede hacer una combinación lineal de las soluciones y también esto representa una solución del sistema. Por ejemplo usando la siguiente función y evaluándola en la ecuación diferencial

$$y = 2\cos x - 8\sin x$$

se tiene

$$(2\cos x - 8\sin x)'' + 2\cos x - 8\sin x' = 2[-\cos x + \cos x] - 8[-\sin x + \sin x] = 0$$

lo que demuestra que $y = 2\cos x - 8\sin x$ también es una solución.

Este ejemplo ilustra el hecho que una combinación lineal de soluciones es una solución, lo que implica una cantidad de ventajas teóricas y prácticas. Se puede establecer esta propiedad de manera general mediante el siguiente teorema

Teorema 5.1

- *Si una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea [5.2] en algún intervalo J es multiplicada por cualquier constante, la función resultante es también una solución de [5.2] en J .*
- *La suma de dos soluciones de [5.2] en J es también una solución de [5.2] en ese mismo intervalo.*

Prueba: Asumiendo que $\phi(x)$ es una solución de [5.2] para algún intervalo J y mostrando que entonces $y = c\phi(x)$ es también una solución de [5.2] en J . Sustituyendo $y = c\phi(x)$ en [5.2], el lado izquierdo de de [5.2] se convierte en

$$(c\phi)'' + f(c\phi)' + g c\phi = c[\phi'' + f\phi' + g\phi]$$

Dado que ϕ satisface [5.2], la expresión entre corchetes es cero, por lo que está demostrada la primera parte del teorema. La prueba de la segunda parte es igual de simple y se deja al

lector su realización. Hay que recalcar que este teorema **no es válido** para ecuaciones lineales no homogéneas o no lineales, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes

Ejemplo 5.2: Una ecuación lineal no homogénea

Mediante sustitución directa se puede mostrar que las funciones

$$y = 1 + \cos x \quad y \quad y = 1 + \sin x$$

son soluciones de la ecuación lineal

$$y'' + y = 1$$

pero las funciones

$$2(1 + \cos x) \quad y \quad (1 + \cos x) + (1 + \sin x)$$

no son soluciones de esa ecuación

Ejemplo 5.3: Una ecuación diferencial no lineal

Nuevamente, por sustitución se muestra que las funciones

$$y = x^2 \quad y \quad y = 1$$

son soluciones de la ecuación diferencial no lineal

$$y''y - xy' = 0$$

pero las funciones

$$-x^2 \quad y \quad x^2 + 1$$

no lo son.

5.2. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Se considerarán ahora las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuyos coeficientes son constantes. Estas ecuaciones tienen importantes aplicaciones en Ingeniería, especialmente en las ramas de mecánica y eléctrica.

Comencemos con la ecuación homogénea, esto es, la ecuación de la forma

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.3}$$

donde a y b son constantes. *Se presume que a y b son reales y el intervalo considerado de existencia es el eje x completo.*

Para resolver la ecuación [5.3], hay que recordar que la solución para la ecuación lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes, $y' + ky = 0$, es $y = ce^{-kx}$, por lo que se puede conjeturar que

$$y = e^{\lambda x} \tag{5.4}$$

puede ser una solución de [5.3] y se escoge λ apropiadamente. Sustituyendo [5.4] y sus derivadas

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

en [5.3], se obtiene

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

de manera que [5.4] es una solución de [5.1] si λ es una solución de la ecuación cuadrática

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad [5.4]$$

Esta ecuación se llama ecuación característica o ecuación auxiliar de [5.3]. Si las raíces son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \quad [5.5]$$

La derivación hecha muestra que las funciones

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad [5.6]$$

son soluciones de [5.3], lo cual puede verificarse por simple sustitución.

De álgebra elemental se conoce que, dado que a y b son reales, la ecuación característica puede tener tres soluciones posibles

1. Dos raíces reales distintas
2. Dos raíces complejas distintas
3. Una raíz doble real

Caso I: Dos raíces reales distintas. La solución básica para cualquier intervalo es

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

Verdaderamente, la independencia lineal se puede deducir del hecho que y_1/y_2 no es constante para ningún intervalo. La solución general es, por tanto

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad [5.7]$$

Ejemplo 5.4: Solución general en el caso de dos raíces reales distintas

Resolver

$$y'' + y' - 2y = 0$$

La ecuación característica $(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$ tiene las raíces 1 y -2, de manera que la solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Caso II: Dos raíces complejas distintas. Por álgebra elemental, en un sistema polinómico de segundo, las raíces deben ser complejas conjugadas, cosa que se infiere directamente de la resolvente del sistema de segundo orden., por lo tanto

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq$$

donde p y q son reales y q es distinto de 0. Esto es consecuencia de que a y b son reales. La solución básica es

$$y_1 = e^{(p+iq)x} \quad \text{y} \quad y_2 = e^{(p-iq)x}$$

que consiste en dos funciones complejas. Existe un gran interés práctico en obtener soluciones reales de estas funciones complejas. Esto se puede lograr aplicando las fórmulas de Euler, las cuales se pueden deducir muy fácilmente a partir de las series de Taylor correspondiente a las funciones exponencial, seno y coseno. Las fórmulas de Euler son

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

tomando $\theta = qx$. De hecho, de la primera fórmula de Euler, se obtiene

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px} e^{iqx} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

y de la segunda fórmula de Euler se obtiene

$$y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px} e^{-iqx} = e^{px} (\cos qx - i \sin qx)$$

De estas dos expresiones para y_1 y y_2 , se puede obtener por adición y substracción

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px} \cos qx$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - y_2) = e^{px} \sin qx$$

Ambas funciones son reales y por el teorema 5.1 se puede concluir que también son soluciones de la ecuación diferencial 5.2. El cociente de estas soluciones no es constante para ningún intervalo, por lo tanto ellas son linealmente independientes en cualquier intervalo, entonces, en el caso de obtener raíces complejas, las soluciones básicas son

$$e^{px} \cos qx \quad \text{y} \quad e^{px} \sin qx$$

La correspondiente solución general es

$$y(x) = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx) \quad [5.8]$$

donde A y B son constantes arbitrarias

Ejemplo 5.5: Solución general en el caso de dos raíces complejas conjugadas

Encontrar una solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

La ecuación característica $(\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0$ tiene las raíces

$$\lambda_1 = p + iq = 1 + 3i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = p - iq = 1 - 3i$$

Por lo tanto $p=1$, $q=3$. Esto da el resultado básico

$$e^x \cos 3x \quad \text{y} \quad e^x \sin 3x$$

que corresponde a la solución general

$$y(x) = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

Caso III: raíces dobles. Este caso se le conoce, a veces, como el caso crítico. Puede verse de [5.5] que se llega a él, si y solo si, el discriminante de la ecuación característica [5.4] vale 0, o sea,

$$a^2 - 4b = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad b = \frac{1}{4}a^2$$

Aquí [5.2] toma la forma

$$y'' + ay' + \frac{1}{4}a^2 y = 0 \quad [5.9]$$

La raíz doble es $\lambda = -\frac{a}{2}$ y se tiene la primera solución

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2}\right)$$

Para encontrar la otra solución y_2 se puede aplicar el método de variación de parámetros, suponiendo

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \quad \text{donde} \quad y_1(x) = e^{-ax/2}$$

Para determinar u , se sustituye y_2 y sus derivadas en [5.9] y se agrupan los términos, obteniéndose

$$u(y_1'' + ay_1' + \frac{1}{4}a^2 y_1) + u'(2y_1' + ay_1) + u''y_1 = 0$$

Dado que y_1 es una solución, la expresión en el primer paréntesis es cero y dado que

$$2y_1' = 2\left(-\frac{a}{2}\right)e^{-ax/2} = -ay_1$$

la expresión en el segundo paréntesis es cero y la ecuación se reduce a $u''y_1 = 0$. Por lo tanto $u'' = 0$. Una solución es $u = x$. De esta manera

$$y_2(x) = xe^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2}\right)$$

y_1 y y_2 son linealmente independientes, dado que su cociente es igual a x , que no es constante en ningún intervalo, por lo tanto, en el caso de una raíz doble, la solución básica de [5.2] es

$$e^{\lambda x} \quad y \quad xe^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2}\right)$$

cuya solución general es

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2}\right) \quad [5.10]$$

Hay que recalcar que si l es una solución simple de [5.4], [5.10] **no es** una solución de [5.2].

6. Operadores Diferenciales

El concepto de Operador implica una transformación que convierte una función en otra. Los operadores y sus correspondientes técnicas (métodos operacionales) juegan un rol muy importante en la rama de las matemáticas para Ingeniería.

El proceso de diferenciación sugiere un operador de la manera siguiente. Sea D la diferenciación con respecto a x , de manera que se puede escribir

$$Dy = y'$$

D es un operador, ya que transforma y , que se presupone diferenciable, en su derivada y' . Por ejemplo

$$D(x^2) = 2x, \quad D(\sin(x)) = \cos(x)$$

Aplicando dos veces D se puede obtener la segunda derivada, $D(Dy) = Dy' = y''$. Usando una notación mas compacta, se puede escribir $D(Dy) = D^2y$, de manera que

$$Dy = y', \quad D^2y = y'', \quad D^3y = y''' \dots$$

De manera más general

$$L = P(D) = D^2 + aD + b \quad [6.1]$$

se llama *Operador Diferencial de Segundo Orden*, donde a y b son constantes. P tiene la connotación de “Polinomio”, L sugiere que es “Lineal”. Esto último se explica detalladamente mas adelante. Cuando L se aplica a una función y , que debe poseer derivadas de al menos orden 2, produce

$$L[y] = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by \quad [6.2]$$

L es un operador lineal. Por definición esto significa que

$$L[\alpha y + \beta w] = \alpha L[y] + \beta L[w]$$

para cualesquiera α y β constantes y para cualesquiera funciones y , w a las cuales se le pueda aplicar L .

La ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea $y'' + ay' + by = 0$ puede ser escrita simplemente como

$$L[y] = P(D)[y] = 0 \quad [6.3]$$

Por ejemplo,

$$L[y] = (D^2 + D - 6)y = y'' + y' - 6y = 0 \quad [6.4]$$

Y dado que

$$D[e^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x}, \quad D^2[e^{\lambda x}] = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

se tiene, de [6.2] y [6.3]

$$P(D)[e^{\lambda x}] = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \quad [6.5]$$

Se puede demostrar que $e^{\lambda x}$ es una solución de [5.3] si y solo si, λ es una solución de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$. Si $P(\lambda)$ tiene dos raíces distintas, se tiene un basamento para la solución, si, por el contrario $P(\lambda)$ posee una raíz doble, se necesita una segunda solución independiente. Diferenciando [5] con respecto a λ e intercambiando la diferenciación con respecto a λ y a x , se obtiene

$$P(D)[xe^{\lambda x}] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)xe^{\lambda x} = 0$$

Donde $P' = \frac{dP}{d\lambda}$. Para una raíz doble, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, lo que sugiere que la segunda solución deseada es $xe^{\lambda x}$. Este resultado se puede confirmar por simple sustitución en [6.3].

$P(\lambda)$ es un polinomio en λ , en el sentido ordinario del álgebra. Reemplazando λ por D , se tiene un “Operador Polinomial” $P(D)$. El punto de este “Análisis operacional” es que $P(D)$ puede ser tratado como una cantidad algebraica, en particular, se puede factorizar. Para ilustrar esto, considérese

$$(D+3)(D-2) = D^2 + D - 6$$

que aparece en [6.4]. Por definición, $(D-2)y = y' - 2y$, por lo tanto

$$\begin{aligned}(D+3)(D-2)y &= (D+3)[y' - 2y] \\ &= y'' - 2y' + 3y' - 6y \\ &= y'' + y' - 6y\end{aligned}$$

Lo que muestra que es permisible la factorización antes mencionada, o sea, se obtiene el mismo resultado. Una solución de $(D+3)y = 0$ es $y = e^{-3x}$, mientras que la solución de $(D-2)y = 0$ es $y = e^{-2x}$. Este resultado no es inesperado, debido al hecho que se factorizó el operador polinomial $P(D)$ de la misma manera en que se factorizó el polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$.

Sin entrar en detalles en este momento, hace falta mencionar que el Método Operacional, puede también ser usado para operadores $M = D^2 + fD + g$ con coeficientes variables $f(x)$ y $g(x)$, pero esta manipulación es mas difícil y requiere mas cuidado. Por ejemplo $x D \neq D x$ debido a

$$xDy = xy' \quad \text{pero} \quad Dxy = (xy)' = y + xy'$$