

نام و نام خانوادگی: شماره ی دانش جویی: وقت سه ساعت

1 کمیت های برداری و اسکالر

- [a] تعریف ی جامع و کامل برا ی کمیت های اسکالر و برداری ارائه دهید.
 [b] آیا موجود - دو متلفه ای ی $(x + y, x - y)$ بردار است یا نه؟
 [c] انرژی ی برهم کنش بین - دو دو قطب ی با گشتاورهای $\tilde{\mu}_1$ و $\tilde{\mu}_2$ را می توان به صورت - برداری $\phi = -\frac{\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\mu}_2}{r^3} + \frac{(\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{r})(\tilde{\mu}_2 \cdot \tilde{r})}{r^5}$ و به صورت - اسکالری $\phi = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi)$ نوشت. نشان دهید که این دو صورت معادل - ند.¹

2 عمل گرهایی برداری

اتحاد های زیر را ثابت کنید.

- [a] $\tilde{\nabla} \times (\tilde{F} \times \tilde{G}) = (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{G})\tilde{F} - (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{F})\tilde{G} + (\tilde{G} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{F} - (\tilde{F} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{G}$.
 [b] $\tilde{\nabla}(\tilde{F} \cdot \tilde{G}) = (\tilde{F} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{G} + \tilde{F} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{G}) + (\tilde{G} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{F} + \tilde{G} \times (\tilde{\nabla} \times \tilde{F})$.
 [c] $\tilde{\nabla} \phi(\alpha) = \tilde{A} \frac{d\phi}{d\alpha}$ that $\alpha := \tilde{A} \cdot \tilde{r}$.
 [d] $(\tilde{r} \times \tilde{\nabla}) \cdot (\tilde{r} \times \tilde{\nabla})\psi = r^2 \nabla^2 \psi - r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \psi}{\partial r}$.

3 معادله های مکسول

معادله های مکسول را برا ی خلاء بنویسید. سپس ثابت کنید که \tilde{E} و \tilde{B} بایست ی در معادله ی موج صدق کنند و از آن جا خواص - این نوع امواج را بیان کنید (راه نمایی: به نتایج ی که مکسول در مورد - نور به دست آورد توجه کنید).

¹ در این جا، θ_1 و θ_2 زاویه هایی - ند که $\tilde{\mu}_1$ و $\tilde{\mu}_2$ با \tilde{r} می سازند و Φ زاویه ی سمت ی $\tilde{\mu}_2$ نسبت به صفحه ی $\tilde{\mu}_1 - \tilde{r}$ است.

4 جا به جایی - عمل گرہا در مکانیک - کوانتیک

در مکانیک - کوانتیک، عمل گرہای موقعیت و تکانه در فضا ی موقعیت به شکل $\hat{x} := x$ و $\hat{p} := i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ تعریف می شوند که در آن $i := \sqrt{-1}$ است. روابط - زیر را ثابت کنید:

[a] $[\hat{x}, \hat{p}]$

[b] $e^{i a \hat{p}} \hat{x} e^{i a \hat{p}}$

(راه نمایی: لم - بیکر - هاسدروف را اثبات نموده سپس رابطه ی [b] را اثبات کنید).

5 قضیه ی گاوس و استوکس

[a] روی مرز - مشخص کننده ی دو ناحیه، چگالی ی سطح ی $\sigma(\vec{r})$ قرار دارد میدان - الکتریک ی روی این دو ناحیه به چه شکل ی تغییر می کنند.
[b] روی مرز - مشخص کننده ی دو ناحیه، جریان - $\vec{J}(\vec{r})$ جاری است، میدان - مغناطیسی ی بین - دو ناحیه به چه شکل ی تغییر می کنند.

6 دلتا ی دیرک

[a] یک ی از نمایش های دلتا ی دیرک به وسیله ی تابع - «زنگوله ای» ی زیر است $f(x, \epsilon) := \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + x^2}$ این ادعا ی ما را ثابت کنید. حال ثابت کنید:

[b] $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}(\delta(x + a) + \delta(x - a))$

[c] $\int_{all\ space} f(x)\delta'(x - a) dx = -f'(a)$

(علامت ' مشتق گیری نسبت به متغیر - x را نشان می دهد).

7 معادله ی لپلس

در ناحیه ای از فضا معادله ی لپلس برقرار است و روی مرز - این ناحیه مشتق - عمود ی پتانسیل $\vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n}$ مشخص است.
[a] ثابت کنید، جواب معادله ی لپلس (در این ناحیه) منحصر به فرد است.
[b] قضیه ی ارنشائو: این پتانسیل در این ناحیه یک نواست (یعنی کمینه یا بیشینه ندارد).