EL1-007 (2004-04-29)

آشنایی با قوانین نیوتون – ماشین آتوود و تعیین شتاب ثقل زمین

ابراهیم کریمي ebi_karimi@hotmail.com

در این درس به بررس ی قوانین سه گانه ی نیوتون خواهیم پرداخت و در ادامه ماشین آتوود را معرفی نموده و از آن برای اندازه گیری شتاب ثقل زمین استفاده کنیم.

0 مقدمه

همان گونه که می دانید علم مکانیک به سه بخش عمده ی سینماتیک دینامیک و استاتیک می پردازد.

۱. سینماتیک توصیف حرکت بدون در نظر عامل حرکت است, به عبارت ی به توصیف اجمال ی حرکت می پردازد در سینماتیک کمیت هایي تعریف می شوند که بیشتر به هندسه ی مساله مربوط اند (نظیر مکان, سرعت, شتاب).
۲. دینامیک به بررسی حرکت با در نظر گرفتن عامل می پردازد, در دینامیک کُنش به عنوان عامل حرکت تعریف می شود.
۳. استاتیک , علم سکون شناسی است و در این شاخه از مکانیک فقط به بررسی وضعیت تعادل ی اجسام می پردازیم.

پایه ی دینامیک, قوانین سه گانه ی نیوتون است که به عنوان منسجم ترین بیان حرکت تا کنون شناخته شده است هرچند که این قوانین در محدوده ی سرعت هایي که خیل ی کم تر از سرعت نور است معتبراند اما هیچ گاه این مشکل ها از ارزش های این قوانین نمی کاهد زیرا یک مهندس عمران برای محاسبات خود نیاز دارد از این قوانین (بیشتر از قانون دوم و سه وم نیوتون) استفاده کند.
بنابراین به تر است که با این قوانین آشنا شده, سپس مسایل مربوط به مکانیک را حل نمود. به همین منظور در سر فصل آینده قوانین سه گانه ی نیوتون را بررسی نموده و با مفاهیم آن ها آشنا می شویم.

1 قوانین نیوتون

پایه ی دینامیک قوانین سه گانه ی نیوتون است و پایه ی قوانین نیوتون, قانون اول نیوتون می باشد. هر یک از قوانین نیوتون دارای پی آمدهایي هستند که در ادامه بحث خواهند شد.

- قانون اول نیوتون : هرگاه برجسم ی برهم کُنش ی وارد نشود, برهم کنش های وارد بریک جسم صفر باشد, آن گاه آن جسم وضعیت حرکت ي خود را حفظ خواهد کرد, اگر در حال سکون باشد هم چنان ساکن باقی خواهد ماند و اگر در حال حرکت باشد به حرکت خود در امتداد خط راست ادامه خواهد داد.

بیان بالا, قانون اول نیوتون خوانده می شود, این قانون به ظاهر ساده مفهوم بسیار مهم مرجع لخت بیان می کند, قانون اول نیوتون تنها از دید ناظر لخت برقرار است. بسیار ی از شما ها شاید بگویید که ناظر لخت به چه درد می خورد, جواب چنین است؛ تنها از دید ناظر لخت می توان دیگر قوانین نیوتون را بررسی نمود, یعنی هرگاه از دید ناظر ی این قانون برقرار نباشد نمی توان بقیه ی قوانین نیوتون را برای آن نوشت. به عنوان مثال, از دید شما برهم کنش های وارد روی کتاب ی که روی میز قرار دارد صفر است, بنابراین بایست ی کتاب وضعیت حرکت خود را حفظ کند ظاهراً به نظر می رسد که شما یک ناظر لخت هستید. از دید شخص ی که داخل ماشین ی شتاب دار قرار دارد, باز برهم کنش ی روی جسم وارد نمی شود. بنابراین کتاب بایست ی وضعیت حرکت خود راحفظ کند, که این جوری نیست زیرا از دید شخص داخل ماشین کتاب با همان شتاب به سمت عقب حرکت می کند.

- قانون دوم نیوتون : هرگاه برهم کُنش های وارد بر یک جسم $\widetilde{F}$ باشد, آن گاه جسم شتاب ی خواهد گرفت که متناسب با نیروی وارد است, $\widetilde{a} \propto \widetilde{F}$. این قانون بیشتر به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\sum_i \widetilde{F}_i = \widetilde{a} \sum_j M_j$$

که در آن $\sum_j M_j$ مجموع جرم تمام سیستم مورد مطالعه است.

رابطه ی بالا یکی از شاه کار های نیوتون است, زیرا رابطه ی بین دو شاخه ی مجزا ی دینامیک و سینماتیک (که در بخش قبل بحث شده ند) رابطه برقرار می کند. شتاب کمیت ی سینماتیک ی است و نیرو یک مفهوم دینامیک ی است, قانون دوم نیوتون پل ی میان این دو کمیت است. هم چنین از دل این قانون کمیت ی فیزیک ی به اسم جرم لخت ی به شکل زیر تعریف می شود:

جرم لخت ی : معرف مقاومت ی است که جسم در برابر تغییر سرعت خط ی از خودَش نشان می دهد.

توجه کنید که قانون دوم از دید ناظر لخت برقرار است.

- قانون سه وم نیوتون: هرگاه جسم A به جسم B نیروی $\vec{F}$ را وارد کند آن گاه جسم B نیز به جسم A نیروی $-\vec{F}$ را وارد می کند.

همان گونه که در پیش بحث کردیم قوانین به ظاهر ساده ی نیوتون مفاهیم بسیار وسیع ی را به هم راه دارند. در این مرحله قانون سه وم نیوتون نیز دارای چندین پي آمد است:

- ✓ پی آمد اول: تک نیرو در عالم هست ی وجود ندارد, به عبارت ی مجموع ي تمام نیرو های جهان عدد زوج ی است.
- ✓ پی آمد دوم: نیرو هايي که به این شکل تعریف می شوند معمولاً عمل و عکس العمل نامیده می شوند, عمل و عکس العمل به دو جسم متفاوت وارد می شوند.
- ✓ پی آمد سه وم: عمل و عکس العمل تفکیک پذیر نیستَ ند, یعنی هیچ کدام نسبت به دیگری جلو تر نیستَ ند (عمل و عکس العمل هم زمانَ نند).

2 شگرد حل مسایل دینامیک

در بخش های قبل ی به بررسی اجمال ی قوانین ي نیوتون پرداختیم اما در این مرحله نوبت به این می رسد که با استفاده از همین قوانین مسایل مختلف دینامیک را حل کنیم. برا ی حل مسایل دینامیک ۷ راه کار زیر را مرحله به مرحله انجام می دهیم.

۱. یک ناظر لخت برا ی مسئله ی خویش پیدا کنید (ناظری که قانون اول نیوتون برای آن صادق باشد).
۲. می خواهید حرکت (یا شتاب, کشش) مربوط به کدام جسم را بررسی کنید, آن را به عنوان سیستم مورد مطاله در نظر می گیرید.
۳. هر چیزی به غیر از سیستم برا ی سیستم شما محیط به حساب می آید منوط به این که با سیستم برهم کنش داشته باشد, محیط های سیستم ی را که در نظر گرفته اید, پیدا کنید.

۴. نمودارِ جسم- آزاد را رسم کنید, به این شکل که با انتخابِ دستگاهِ مختصاتِ مناسب به جسم نقطه ای نسبت می دهید و به ازایِ هر محیط تنها وفقط تنها یک نیرو رویِ دستگاه رسم می کنید.

۵. سعی کنید این نیرو ها را بر حسبِ پارامتر های معلومِ مسئله روی دستگاهِ مختصات تصویر کنید, سپس برا ی هر راستا قانونِ دومِ نیوتون را به شکلِ زیر به نویسید:

$$\sum_{i} F_{i(x,y,z)} - \sum_{j} R_{j(x,y,z)} = a_{(x,y,z)} \sum_{k} M_k$$

مجموعِ نیرو هایِ سویِ مثبت منهای مجموعِ نیرو های سوی منفی (در راستای محورِ) برابر است با شتابِ سیستم در آن راستا ضرب درِ جرمِ سیستم.

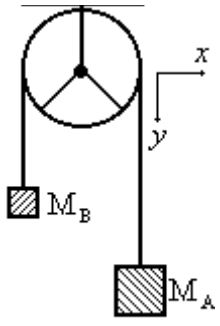
۶. تعدادِ معادله ها با تعدادِ مجهول ها بایست ی با هم برابر باشند, در غیرِ این صورت پارامتری را نادیده گرفته ایم و سعی می کنیم تا قیدِ مسئله را پیدا کنیم.

۷. در تمامِ مراحلِ بالا قانونِ سه ومِ نیوتون را به خاطر داریم, بیش تر به مرحله ی ۴ و ۵ توجه می کنیم.

معمولاً مردم (فیزیک پیشه ها), مراحلِ بالا را در ذهنَ شان انجام می دهند و بیش تر به کشیدنِ نمودارِ جسم- آزاد بسَنده می کنند. مشکلِ اصلی ای که در حلِ مسایل پیش می آید این است که دانش جو نمی تواند قیدِ مسئله را به دست آورد. برایِ روشن تر شدنِ مراحلِ حلِ مسئله, مسئله یِ مشهورِ آتوود را حل می کنیم.

3 ماشینِ آتوود

مسئله: دو جسم به جرم های معلومِ M_A و M_B را به وسیله ی طناب ی به دونِ جرم از قرقره ی ثابت ی که جرمِ آن ناچیز است, می گذرانیم شتابِ جرمِ A و B را به دست آورید.



شکلِ اول

حل: برایِ حلِ این مسئله ناظری لخت انتخاب می کنیم (در شکلِ اول ناظرِ لخت با یک دستگاهِ مختصات در گوشه ی شکل نشان داده شده است) و از دیدِ این ناظر مسئله را حل می کنیم [۱]. سیستم های موردِ

مطالعه, جسم A , جسم B و طناب هستند, پس سه سیستم را بایست ی بررسی کنیم [۲]. اگر سیستم مورد مطالعه جسم A باشد, آن گاه دو محیط برای این جسم وجود دارد.

- ✓ مرکز زمین: که نیروی وزن را اعمال می کند ($W_A = M_A\, g$).
- ✓ طناب: که نیروی کشش را وارد می کند (T_A).

به همین ترتیب برای جسم B نیز دو محیط زیر وجود دارد:

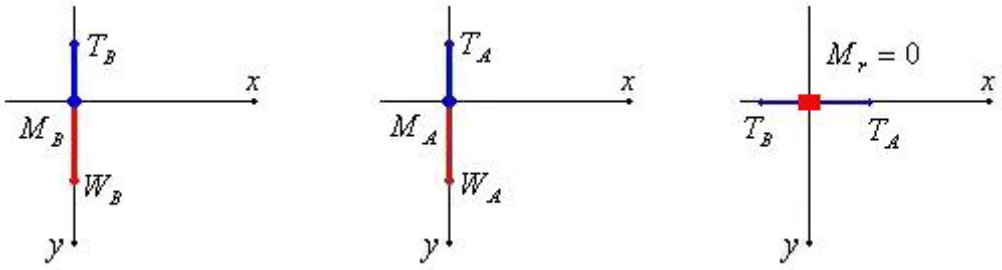
- ✓ مرکز زمین: که نیروی وزن را اعمال می کند ($W_B = M_B\, g$).
- ✓ طناب: که نیروی کشش را وارد می کند (T_B).

و برای طناب دو محیط زیر وجود دارد (فرض کرده ایم که طناب جرم ندارد, یعنی برهم کنش گرانش ی را احساس نخواهد کرد):

- ✓ جسم A : که نیروی کشش را وارد می کند (T_A).
- ✓ جسم B : که نیروی کشش را وارد می کند (T_B).

توجه کنید که در برهم کنش های بالا, قانون سه وم نیوتون را در نظر گرفته ایم (از طرف طناب نیروی T_A به جسم A وارد می شود, بنابراین از طرف جسم A نیز همان نیرو ی T_A به طناب وارد می شود) [۳ و ۴].

در مرحله ی [۴] م, نمودار جسم- آزاد را رسم می کنیم:



شکل دوم: نمودار جسم – آزاد مربوط به ریسمان (قسمت بالایی), جسم A و جسم B .

حال برا ی هر سه جسم به طور جدا گانه قانون دوم نیوتون را برا ی هر راستا می نویسیم [۵]:

$$W_B - T_B = a_B M_B \qquad W_A - T_A = a_A M_A \qquad T_A - T_B = a_r M_r = 0$$

از آخرین رابطه مشخص است که بایست ی کشش نخ ها با هم برابر باشند, زیرا جرم طناب صفر است, پس:

$$W_B - T = a_B M_B \qquad W_A - T = a_A M_A \qquad T_A = T_B =: T$$

در مرحله ي [۶] تعدادِ مجهول ها را با تعدادِ معادله ها می سنجیم, دو معادله ی مستقل (اول ی و دوم ی) داریم اما تعدادِ مجهول های مسئله ۳ تا هستند (T و a_A و a_B). چون تعدادِ مجهول ها بیش تر از تعدادِ معادله ها است, سعی می کنیم قیدی ی را برا ی این مسئله پیدا کنیم. قید مسئله بسیار ساده است: در طولِ حرکت طولِ طناب ثابت است, همین قید را بر حسبِ مکانِ جسم های A و B صورتِ ریاضی بیان کنیم:

$$\ell := y_1 + y_2 + \pi R$$

حال از رابطه ی فوق نسبت به زمان مشتق می گیریم (مشتقِ زمان ی مکان نسبت به زمان سرعت تعریف می شود):

$$v_1 + v_2 = 0$$

دوباره نسبت به زمان از رابطه ی بالا مشتق می گیریم (مشتقِ زمان ی مکان نسبت به زمان شتاب تعریف می شود):

$$a_1 + a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -a_2 =: a$$

با در نظر گرفتنِ رابطه ی قید ی بالا می توانیم معادله های حرکتِ جسمِ A و جسمِ B را باز نویسی کنیم:

$$W_B - T = -a\,M_B \qquad W_A - T = a\,M_A \qquad T := T_A = T_B$$

با استفاده از روابط, به دست خواهیم آورد:

$$\begin{cases} a = \dfrac{W_A - W_B}{M_A + M_B} = \dfrac{M_A - M_B}{M_A + M_B}\,g \\ T = \dfrac{2M_A M_B}{M_A + M_B}\,g \end{cases}$$

این روش را اولین مرتبه آتوود برا ی اندازه گیری شتابِ ثقلِ زمین به کار بردند و در این روش با اندازه گیری شتابِ وزنه ها و اندازه گیری جرم هر کدام از وزنه ها به راحت ی می توانستند شتابِ ثقلِ زمین را به دست آورند.

آزمایشِ ماشینِ آتوود

با توجه به محاسبه های انجام شده در بخشِ قبل کاملاً بدیهی است که شتابِ جسم های A و B ثابت است, بنابراین برا ی حرکتِ آن ها می توان معادله ی شتاب ثابت را به کار برد.

$$y = \frac{1}{2}at^2$$

که در آن فرض شده که سرعتِ اولیه ی جسمِ مورد نظر صفر بوده است (و حرکت جسم از مبدای مکان بوده است $y_0 = 0$). بنابراین برا ی به دست آوردنِ شتابِ جسم ها مسافت های خاص ی را در نظر گرفته سپس زمانِ طی کردن این مسافت ها را به وسیله ی زمان سنج (کرنومتر) اندازه می گیریم (به جدولِ یک توجه کنید).

جدولِ یک

M_A و M_B را مقادیري ی مشخص ی در نظر بگیرید.

شتاب ثقلِ زمین	زمان	جابجايي
g	t	$y = 0.3m$
g	t	$y = 0.5m$
g	t	$y = 0.7m$

در نهایت مقادیري ي برا ی به دست خواهید آورد, میانگینِ آن ها را به دست آورید و آن را آزمایش گاه ی بنامید, فرض کنید مقدارِ واقعیِ برابر است با , حال خطایِ مطلق نسب ی و درصدِ خطا و حساسیتِ این آزمایش را به دست آورید.

این روش به تر است یا روشِ آونگ دلیلِ خود را به طورِ دقیق بیان کنید (راهنماي ي به درسِ اول نگاه ی بیاندازید).