EL1-006 (2004-04-09)

مطالعه ی آونگِ ساده و به دست آوردنِ شتابِ ثقلِ زمین

ابراهیم ِ کریمي ebi_karimi@hotmail.com

در این آزمایش آونگِ ساده[1] را تعریف و حرکتِ نوسان ی آن را بررسی کرده و دوره ی نوسانِ یک آونگِ ساده را به دست می آوریم سپس تحقیق می کنیم که دوره ی نوسان های آونگِ ساده مستقل از جرمِ آونگ - و تنها وابسته به طولِ آونگ و شتاب ِثقلِ زمین می باشد. در نهایت با استفاده از روابط به دست آمده در قسمت های قبل ی شتاب ثقلِ زمین را با دقتِ بالای ی در آزمایش گاه به دست می آوریم.

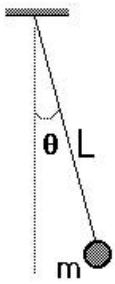
0 مقدمه

حرکت نوسان ی ساده[2] یک ی از مهم ترین مسایلِ موجود در طبیعت است که فیزیک پیشه ها از آن بسیار استفاده می کنند (مثلاً به درسِ EL1-004 مراجعه کنید). آونگ هایي که مطالعه ی آن ها برایِ یک فیزیک پیشه مهم است عبارت اند از:

- ✓ آونگِ ساده
- ✓ آونگِ فیزیک ی
- ✓ آونگِ پیچش ی

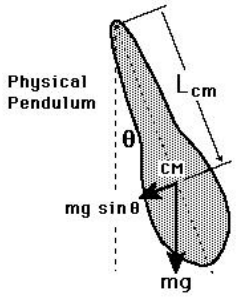
آونگِ ساده: از یک جرمِ نقطه ای که به وسیله ی طناب (میله ای) بدونِ جرم به یک نقطه متصل شده است, تشکیل شده است. بررس ی مساله یِ آونگِ ساده در حالتِ کل ی مشکل است (حل ی صریح برای آونگ ساده وجود ندارد - معمولاً بر اساس انتگرال های بیضوی بیان می شوند) در ادامه ما حلِ حالتِ خاص ی از این مساله را ارائه خواهیم کرد (شکلِ اول).

[1] Simple pendulum
[2] Simple harmonic motion



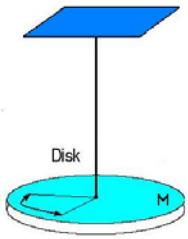
شکل اول

آونگ فیزیک ی[3]: هر جسم صلب ی که بتواند حول محوری که جسم به آن متصل است, بچرخد یک آونگ فیزیک ی است (این مساله حالت کل ی آونگ ساده است). باز حل حالت کل ی این مساله نیاز به انتگرال های بیضوی دارد (شکل دوم).



شکل دوم

آونگ پیچش ی[4]: هر گاه جسم ی از نقطه ای آویزان باشد و در صفحه ی شامل نقطه ی آویز و خود جسم (صفحه ی عمودی) شروع به نوسان زاویه ای کند آن جسم را آونگ پیچش ی گویند. بالعکس حل مساله ی آونگ پیچش ی نسبت به بقیه بسیار ساده تر است (شکل سوم).



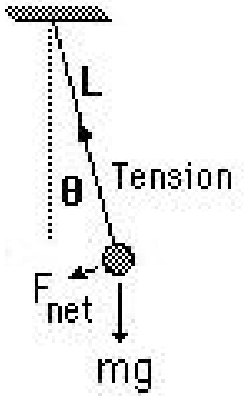
شکل سوم

در آزمایش گاه ما به بررس ی آونگ ساده می پردازیم , هر چند که انواع دیگر آونگ ها (آونگ فیزیک ی و پیچش ی) هم مهم هستند اما در آزمایش گاه مقدمات ی مکانیک آن ها را بررس ی نمی کنیم ولی برای دانش جوهای رشته ی فیزیک آونگ فیزیک ی و کاتر در آزمایش گاه مکانیک بررس ی می شود.

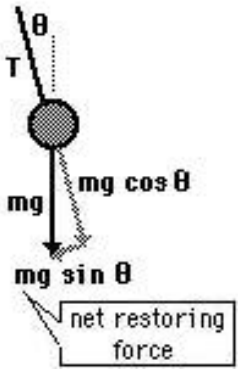
[3] Physical pendulum
[4] Torque pendulum

1 آونگِ ساده

همان طور که گفته شد آونگِ ساده از یک جرمِ نقطه ای و یک طنابِ بدون جرم که به نقطه ای ي ثابت متصل شده اند, تشکیل شده است. حرکت آونگِ ساده زمان ی قابلِ اهمیت است که آونگ را به انـدازه ی زاویه ای مشخص از حالتِ تعادل خارج کنیم در این وضعیت مولفه ای از نیروی وزن که مماس بـر مسـیر حرکتِ جسم است آن را به حالتِ اولیه باز می گرداند و این جسم شتاب می گیرد تا از وضعیت تعادل که همان حالتِ اولیه بوده است بگذرد به دلیل داشتنِ انرژی جنبش ی بـالا ایـن جسـم از وضـعیتِ تعـادل گذشته و به همان اندازه ای که قبلاً کشیده بودیم, بالا خواهد رفت (اگر از نیرویِ اصطکاک چشم پـوش ی کنیم- شکلِ چهارم). برای هم چین حالت ی می توان مــعادلاتِ نیوتـون را نوشـت و دینامیـکِ جسـمِ آویزان را بررس ی نمود:



شکلِ چهارم[5]



شکل پنجم

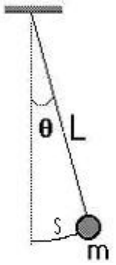
نیرویِ وزن را می توان به دو نیرویِ عمود برهم تجزیه نمود (برایِ درکِ بهتر مساله) مولفه ی مماس ی این نیرو, F_{net}, جسم را به حالتِ اولیه برمی گرداند- بـه عبـارت ی همـان نیـرویِ بازگردانـنـده اسـت- و نیرویِ عمود بر مسیر کششِ نخ را خنثا می کند:

$$\begin{cases} T - mg\cdot\cos\theta = ma_N \\ -mg\cdot\sin\theta = ma_s \end{cases}. \qquad (1)$$

که در آن a_s و a_N به ترتیب شتابِ مماس ی و شتابِ شعاع ی (مرکز گرا $a_N = \frac{v^2}{L}$) و T کششِ نخ است. توجه کنید که در عبارتِ دوم رابطه ی بالا, علامتِ منفی نشان گر این است که این نیرو در جهـتِ کاهشِ اندازه ی زاویه اعمال می شود. برایِ این که درست ی روابط ی را که به دسـت آورده ایـم تحقیـق کنیم در حالتِ خاص (زاویه ای مشخص) نیرویِ کشـــش را محاسبه می کنیم, مثلاً در حالـــت ی که جسم در حالِ تـــعادل است, $\theta = 0$, کششِ نخ برابـر اسـت بـا $T = mg$. بـدیهی اسـت کـه جسـم در

[5] نیروی بازگرداننده را با F_{net} نشان داده ایم.

راستای طناب حرکت ی نداشته, هم چنین در حالتِ سکون شتابِ مرکزگرا صفر است (چون سرعت ندارد) در نتیجه شتاب جسم در این راستا برابر صفر است ($a_N = 0$).



شکلِ ششم

رابطه ی دوم برایِ ما بسیار مهم است و در ادامه سعی می کنیم با استفاده از آن, معادله ی حرکتِ این وزنه را به دست آوریم با کم ی ساده سازی خواهیم داشت:

$$a_s = -g \cdot \sin\theta \qquad (2)$$

از طرف ی زاویه را می توان برحسبِ طولِ قوس بیان نمود, $\theta_{rad} = \frac{S}{L}$, هم چنین شتابِ مماس ی برابر است با: $a_s = \ddot{S} = \frac{d^2S}{dt^2}$[6], با جای گذاری این عبارت ها در رابطه ی (2) به دست خواهد آمد:

$$\ddot{S} = -g \cdot \sin(\frac{S}{L}).$$

رابطه ی فوق یک معادله دیفرانسیلِ مرتبه ی دوم است و جوابِ آن به صورتِ انتگرالِ بیضوی بیان می شود, اما ما در این مرحله به ساده سازیِ مساله خواهیم پرداخت و این معادله را با یک تقریبِ فیزیک ی به ساده گی حل خواهیم کرد, معمولاً حرکتِ آونگ زمان ی مهم است که زاویه ی انحرافِ آن کوچک باشد, $\sin x$ را مي توان حولِ نقطه ی صفر بسط تیلور داد:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

اگر زاویه ی x کوچک باشد (به عنوانِ مثال $x \le 0.1\,\text{rad}$)آن گاه در تقریبِ مرتبه ی اول می توان $\sin x$ را با خودِ زاویه ی x برابر گرفت (البته بایست ی زاویه برحسبِ رادیان بیان شود). با بحث ی که انجام دادیم مساله را به دین شکل ساده می کنیم:

فرض می کنیم زاویه ی انحراف کوچک تر از 6° درجه (0.1_{rad}) باشد (یعنی $S \le 0.1 \cdot L$), با استفاده از تقریبِ بیان شده خواهیم داشت:

$$\ddot{S} = -g \cdot (\frac{S}{L}) \quad \Rightarrow \quad \ddot{S} = -(\frac{g}{L}) \cdot S \ .$$

این رابطه بسیار آشنا است, در درس EL1-004 بیان شدکه در هر حرکت ی اگر بتوانیم شتابِ یک جسم را برحسبِ منهای جابجای ی بیان کنیم (با ضرایب ثابت), آن حرکت نوسان ی ساده خواهد بود و پی آمد ِ آن این است که فرکانسِ زاویه ای این نوسان ها برابر خواهد بود با جذر آن ضریبِ ثابت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \ .$$

[6] نمادِ نقطه (.) مشتق گیری نسبت به زمان را نشان می دهد,از نظر تاریخ ی این نماد را اولین مرتبه نیوتون استفاده کرده است.

با جای گذاریِ فرکانسِ زاویه ای, ω, برحسبِ دوره ی نوسانِ این آونگ, T, خواهیم داشت[۷]:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \ .$$

از رابطه ی بالا کاملاً مشخص است که دوره ی نوسان های یک آونگ, مستقل از جرمِ آونگ و وابسته به طولِ آونگ و شتابِ ثقل زمین درآن نقطه از زمین می باشد, وابسته گی دوره ی تناوب آونگ به طول و شتابِ ثقل به صورتِ زیر است:

- ✓ با افزایشِ طولِ آونگ, زمانِ تناوبِ این نوسان ها زیاد خواهد شد به عبارت ی آونگ کُند تر کار خواهد کرد, مثلاً آونگ ی با طولِ $1\,m$ از یک آونگ با طولِ $0.5\,m$ کُند تر کار خواهد کرد.
- ✓ با افزایشِ شتابِ ثقلِ در آن نقطه دوره ی نوسان ها کوتاه تر خواهد شد یعنی آونگ تُندتر کار خواهد کرد, به عنوانِ مثال اگر آونگ را رویِ کُره ی خورشید ببریم بسیار تُند تر کار خواهد کرد.

در آزمایش گاه ما سعی ی می کنیم که این وابسته گی ها را تجربه کنیم (البته نمی توان به طورِ معمول شتابِ گرانش ی زمین را تغییر داد).

آزمایش - تحقیقِ تقریبِ ساده سازی معادله ی آونگِ ساده

۱. در تئوری که در بالا آوردیم عملاً از این تقریب استفاده کردیم که زاویه ی نوسان بایست ی کوچک تر از 6° درجه باشد, زیرا روابطِ مربوط به حرکتِ آونگ فقط با استفاده از این تقریب به دست آمده بودند ($\sin x \approx x$). در آزمایش گاه ما دوره ی نوسان را به ازای زاویه هایِ مختلف به دست می آوریم, مثلاً به شکلِ زیر عمل می کنیم:

طولِ آونگ را $100\,cm$ انتخاب می کنیم سپس به اندازه ی مقدارِ S آن را منحرف می کنیم, آن گاه زمانِ N نوسان را اندازه گرفته و آن را t می نامیم با استفاده از داده های به دست آمده جدولِ زیر را تشکیل می دهیم:

جدولِ یک

L=100 cm

مقدارِ جابه جاي ي برحسب سانتی متر $S\ (cm)$	زمانِ تناوب بر حسبِ ثانیه $T = \frac{t}{N}\ (s)$
10 cm	
8 cm	
5 cm	
30 cm	
50 cm	

[7] مواظب باشید! T در این جا معرفِ دوره ی نوسان های آونگ است و با کشش نخ متفاوت است.

بدیهی است که داده های ردیفِ اول, دوم و سوم نزدیک به هم خواهد بود, اما داده هـای ردیـف چهـارم و پنجم متفاوت با سه داده ی اولیه خواهد بود, چرا ؟ در گزارش کار خود توضیح دهید.

۲. در این بخش به وابسته گی دوره ی نوسانِ آونگ با طولِ آن خواهیم پرداخت, به دین گونـه کـه طولِ آونگ را متغییر در نظر خواهیم گرفت و در همان محدوده ای که روابطِ ما صـادق هسـتند دوره ی نوسانِ آن را به ازای طول های مختلف به دست می آوریم:

جدولِ دوم

L=100 cm

مقدارِ جابه جاي ي برحسب سانتی متر S (cm)	زمانِ تناوب بر حسبِ ثانیه $T=\frac{t}{N}$ (s)
10 cm	
8 cm	

L=80 cm

8 cm	
5 cm	

L=50 cm

5 cm	
3 cm	

از داده های بالا می توان نتیجه گرفت که دوره ی تناوبِ آونگ با کاهشِ طولِ آن کاهش پیدا می کنـد. داده های این جدول را برای مرحله ی ۴ نگه دارید.

۳. در این مرحله تحقیق می کنیم که دوره ی نوسان های آونگِ ساده مستقل از جرمِ آن اسـت بـه همین منظور از دو آونگِ هم طول استفاده می کنیم, یک ی چوب ی و دیگری فلزی. سـپس آن ها را (تقریباً) در یک نقطه به نوسان در می آوریم و زمان تناوب هر دو را با هم مقایسه می کنـیم. عملاً از این داده می توان نتیجه گرفت که دوره ی تنـاوب آونـگ ی ساده مستقـل از جـرمِ آونگ است (جالب است!).

۴. در آخرین بخشِ این آزمایش از داده های جدولِ دوم استفاده کرده و شتابِ ثقـلِ زمـین را در آزمایش گاه به دست می آوریم. برایِ انجامِ این کار جـدول (زیـر) سـوم را تشـکیل مـی دهـیم, سپس داده های این جدول را روی کاغذِ شطرنج ی رسم می کنیم, حاصل آن نقاط ی مشـخص خواهد بود, خط ی را از مبداء مختصات جنان می گذرانیم که به نقاطِ رسم شـده بسـیار نزدیـک باشد. شیبِ این خط برابر است با $\frac{4\pi^2}{g}=$شیب, با محاسبه ی شیب می توان شتابِ ثقـل را بـه

دست آورد, در نهایت با داشتن مقدار تجربی این داده سعی کنید خطای مطلق نسبی و دقت این آزمایش را محاسبه کنید.

جدول سوم

طول آونگ برحسب متر	زمان تناوب آونگ برحسب ثانیه $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$	نقاط $(T^2, L) \rightarrow (x, y)$ را رسم می کنیم
L=1.0 m		
L=0.8 m		
L=0.5 m		

2 مراجع

برای مطالعه ی بیشتر می توانید از مراجع زیر استفاده کنید:

۱. فیزیک, نوشته ی: *د.هالیدی و ر. رزنیک* - فصل پانزدهم

2. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/pendp.html