

EK-004 (2004/06/29)

رفتار - نابهنجار - موج - تک فام - (و غیر - تک فام) تخت در نزدیکی - نقطه ی کانون

e_karimi@iasbs.ac.ir

fmrad@iasbs.ac.ir

ابراهیم - کریمی -[†] #

فریبا مصلحی - راد[†]

حسن - حسن آبادی[‡]

[†]. زنجان - مرکز - تحصیلات - تکمیلی در علوم پایه ی زنجان.

[‡]. تهران - مرکز - آموزش عالی - دختران ولی - عصر.

#. زنجان - دانش گاه - آزاد - اسلامی - واحد زنجان.

چکیده:

در این مقاله، توزیع - شدت و فاز - مربوط به یک موج - تخت تک فام که به وسیله ی یک روزنه ی دایره ای پراشیده شده است را در اطراف - نقطه ی کانون بررسی می کنیم و دامنه ی این موج را با استفاده از انتگرال - هویگنس [a] - فرنل [b] بدون - در نظر گرفتن - ابیراهی به دست آورده و در بند های توزیع - شدت و فاز را در نزدیکی - نقطه ی کانون رسم کرده ایم. در نهایت با تعریف - نقطه ی تکین - فازی به بررسی - رفتار - یک موج - غیر - تک فام (ترجیحاً با توزیع - فرکانسی - گاوسی) حول - نقطه ی تکین - فازی می پردازیم.

واژه های - کلیدی: پراش، نقطه ی تکین - فازی، تعدیل کننده ی طیف.

0 مقدمه

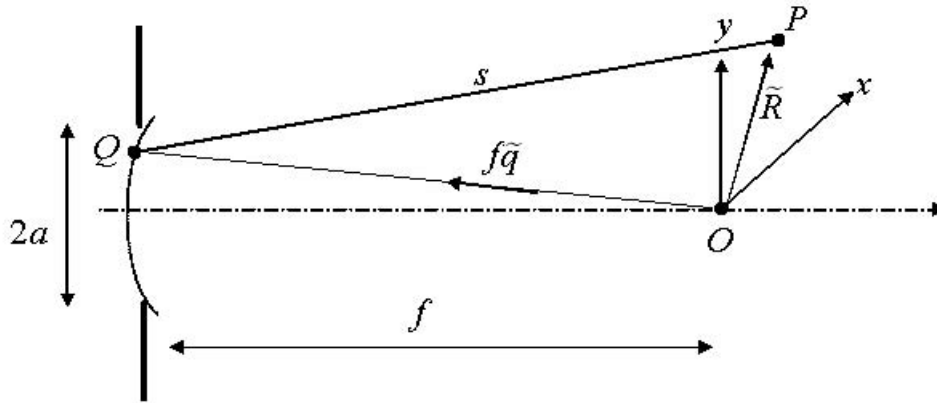
همواره بررسی باریکه ی کانونی شده در اطراف نقطه ی کانون برای فیزیک پیشه ها جالب بوده، این موضوع دو قرن است که مورد توجه فیزیک پیشه ها قرار گرفته و نتایج بسیار جالبی را به همراه داشته است [1-10]. علی الخصوص باعث به وجود آمدن شاخه ای جدید و مهم در علم اپتیک شده که به اسم اپتیک تکینه گی معرفی شده است [1]. در سال 1891 اولین بارگوی [c] این موضوع را مطرح نمود، سال ها بعد توسط افراد مختلف؛ مانند والکر [d]، رایچ [e] و ... مورد بررسی قرار گرفت تا در سال 1954 توسط لینفوت [f] و ولف [g] این موضوع به طور بسیار منسجم تر مورد بررسی قرار گرفت. در سال 1976 کارتر [h] برای یک حالت خاص از موج گاوسی این مسئله را بررسی نمود. در سال های اخیر چندین مقاله ی متفاوت در همین زمینه ارائه شده است که این امر را واداشت تا به بررسی این مسئله و نتایج این کارها پردازیم. در این مقاله به بررسی توزیع شدت و فاز در اطراف نقطه ی کانونی یک موج تخت پراشیده شده از یک روزنه ی دایره ای می پردازیم.

موج تک فام تختی را در نظر بگیرید که از یک روزنه ی دایره ای به شعاع a پراشیده شده و در نقطه ای مانند O کانونی می شود. موج پراشیده شده به صورت قطار موجی (کروی) است که در نقطه ی O کانونی می شود. دامنه ی موج پراشیده شده در نقطه ی P ، که به وسیله ی بردار \vec{R} نسبت به نقطه ی کانون O مشخص می شود، با استفاده از اصل هویگنس [a]- فرنل [b] در تقریب پیرامحوری برابر خواهد بود با [2]:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{A e^{-ikf}}{f} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} d\sigma. \quad (1)$$

که در آن f فاصله ی نقطه ی کانون تا مکان روزنه، s فاصله ی نقطه ی مشاهده تا نقطه ای روی جبهه ی موج Q ، $\frac{4}{\pi}$ دامنه ی موج فرودی در نقطه ی Q ، k و λ به ترتیب عدد و طول موج - فرودی و $d\sigma$ المان سطح روزنه است. به منظور محاسبه ی انتگرال رابطه ی (1) مبداء مختصات دکارتی را در نقطه ی O در نظر می گیریم به گونه ای که محور z ها در راستای انتشار موج اولیه (عمود بر صفحه ی روزنه) قرار گیرد¹.

¹ همان محور اپتیکی سیستم است.



شکل ۱: نمای موج پراشیده شده از روزنه ی دایره ای در شکل بالا نشان داده شده، Q نقطه ای روی جبهه ی موج، P نقطه ی مشاهده و O کانون است.

مختصات نقاط P و Q برابر است با:

$$P \begin{cases} x = r \sin \psi \\ y = r \cos \psi \\ z = z \end{cases}, \quad Q \begin{cases} x' = r \sin \theta \\ y' = r \sin \theta \\ z' = -\sqrt{f^2 - (a\rho)^2} \end{cases}. \quad (2)$$

که در آن پارامتر مقیاس روزنه ی دایره ای، r فاصله ی نقطه ی P از کانون و بنابراین استوانه ای مسئله زوایای سمتی ψ و θ برای نقاط P و Q نسبت به محور y ها تعریف شده است [2-4].

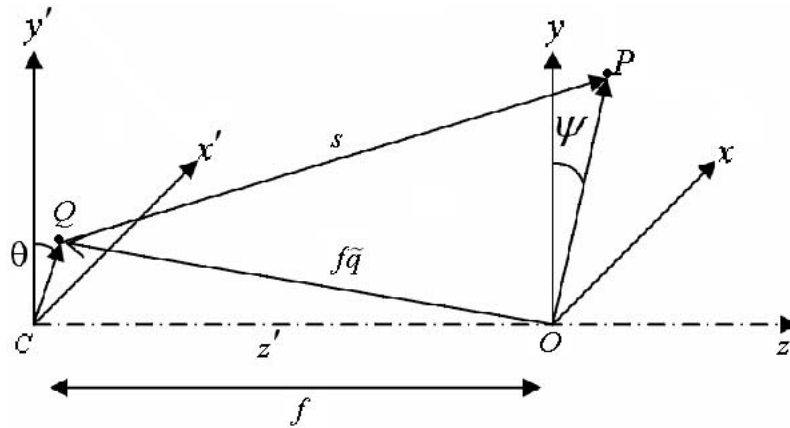
همان طور که گفته شد مسئله را در تقریب پیرا محوری بررسی می کنیم. تحت این شرط می توان از تغییرات فاکتور فرود صرف نظر کرد، در نتیجه با تقریب خوبی داریم:

$$s - f \simeq -\tilde{q} \cdot \tilde{R}, \\ = -\frac{x x' + y y' + z z'}{f}. \quad (3)$$

که در آن بردار \tilde{q} در راستای OQ است. با جای گذاری رابطه ی (2) در (3) بدست خواهیم آورد:

$$s - f = -\frac{a \rho r \cos(\theta - \psi)}{f} - z \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a\rho}{f}\right)^2 + \dots\right). \quad (4)$$

رفتار نابهنجار موج تک فام (و غیر تک فام) تخت در نزدیکی نقطه ی کانون



شکل ۲: z محور اپتیکی، صفحه xyz صفحه ی تصویر و x'y'z' صفحه ی روزنه هستند [4].

با تعریف پارامترهای بی بُعد زیر^۲

$$\begin{cases} u := \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right)^2 z \\ v := \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right) r \end{cases} \quad (5)$$

و استفاده از این واقعیت که $(f \gg a \gg \lambda)$ ، رابطه ی تقریبی (4) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$k(s - f) = -v \rho \cos(\theta - \psi) + \left(\frac{f}{a}\right)^2 u - \frac{1}{2} u \rho^2. \quad (6)$$

که در آن از توان های دوم به بعد $\frac{a\rho}{f}$ صرف نظر کرده ایم. بنابراین رابطه ی (1) به صورت زیر ساده خواهد شد^۳:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{a^2 A}{f^2} e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-i(v \rho \cos(\theta - \psi) + \frac{1}{2} u \rho^2)} \rho d\rho d\theta. \quad (7)$$

با انتگرال گیری نسبت به θ خواهیم داشت:

$$U(P) = -\frac{2\pi a^2 A i}{\lambda f^2} e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u} \int_0^1 J_0(v \rho) e^{-\frac{1}{2} u \rho^2} \rho d\rho. \quad (8)$$

که در آن $J_0(v \rho)$ تابع بسل مرتبه ی صفر^۲ است [2]. به تراسه رابطه ی بالا را به شکل زیر بنویسیم:

^۲ این پارامترها همراه با ψ مکان نقطه ی مشاهده را به طور کامل (منحصربه فرد) مشخص خواهند نمود، اما چون مسئله دارای تقارن استوانه ای است نقش ψ زیاد مهم نیست.
^۳ المان سطح، $d\sigma$ ، به صورت $a \rho d(a\rho) d\theta$ نوشته شده است.

$$U(P) = \frac{\pi a^2 A}{\lambda f^2} e^{i(-\frac{\pi}{2} + (\frac{f}{a})^2 u)} [C(v, u) - i S(v, u)]. \quad (9)$$

که در آن $S(v, u)$ و $C(v, u)$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} C(v, u) &:= 2 \int_0^1 J_0(v \rho) \cos\left(\frac{1}{2} u \rho^2\right) \rho d\rho, \\ S(v, u) &:= 2 \int_0^1 J_0(v \rho) \sin\left(\frac{1}{2} u \rho^2\right) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (10)$$

عبارت های بالا را می توان برحسب توابع لومل [i] بیان نمود [5].

1 توزیع شدت در نزدیکی کانون

در بخش قبل دامنه ی موج پراشیده شده در نزدیکی نقطه ی کانون را بدست آوردیم (رابطه ی (8)). شدت در نزدیکی نقطه ی کانون برابر است با:

$$\begin{aligned} I &= \|U(P)\|^2, \\ &\propto M(v, u; \lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن $M(v, u; \lambda)$ تابع تعدیل کننده (ی طیف) است⁴

$$\begin{aligned} M(v, u; \lambda) &:= \left\| \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0(v \rho) e^{-\frac{i}{2} u \rho^2} \rho d\rho \right\|^2, \\ &= \frac{1}{\lambda^2} [C^2(v, u) + S^2(v, u)]. \end{aligned} \quad (12)$$

1.1 توزیع شدت در صفحه ی کانون

برای نقاطی که در صفحه ی کانون قرار دارند می توان توزیع شدت را به صورت زیر ساده نمود:

⁴ به تراسست این تعریف را به خاطر بسپارید.

رفتار نابهنجار موج تک فام (و غیر تک فام) تخت در نزدیکی نقطه ی کانون

$$I(v, 0) = \left[\frac{2J_1(v)}{v} \right]^2 I_0. \quad (13)$$

که در آن $I_0 = \frac{\pi^2 \|A\|^2}{\lambda f^2}$ و $J_1(v)$ تابع بسل مرتبه ی اول است. این همان نتیجه ای است که در مورد پراش فرانهورف [۱] از روزنه ی دایره ای بدست می آمد و مکان حلقه های تاریک ایری [k] را مشخص می کند.

1.2 توزیع شدت در راستای محور اپتیکی

برای نقاطی که در راستای محور اپتیکی قرار دارند $v = 0$ است، اگر رابطه ی (11) را ساده کنیم توزیع شدت به صورت زیر در خواهد آمد:

$$I(0, u) = \left[\frac{\sin(\frac{u}{4})}{(\frac{u}{4})} \right]^2 I_0. \quad (14)$$

برطبق رابطه ی (14) در نقاطی در راستای محور اپتیکی شدت صفر خواهد شد که فاصله ی اولین صفر از مکان نقطه ی کانون برابر است با:

$$z_0 \simeq \pm \frac{1}{2} \left(\frac{f}{a} \right)^2 \lambda. \quad (15)$$

در شکل سه وم پربند های شدت ثابت در حوالی نقطه ی کانون رسم شده، که نتایج بالا در آن ها کاملاً مشهود است.

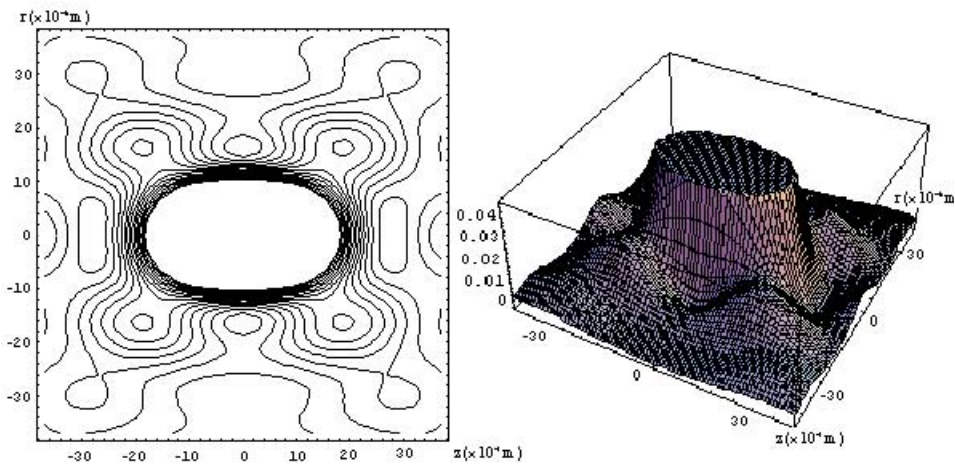
2 رفتار فاز در نزدیکی کانون

توزیع فاز در نزدیکی نقطه ی کانون برای یک موج پراشیده شده از یک روزنه ی دایره ای بر اساس رابطه ی (9) برابر است با:

$$\varphi = \left(\frac{f}{a} \right)^2 u - \chi(v, u) - \frac{\pi}{2} \quad \text{Mod } 2\pi. \quad (16)$$

که در آن

$$\chi(v, u) := \arctan \left(\frac{S(v, u)}{C(v, u)} \right). \quad (17)$$



شکل ۳: سمت - چپ پربند های شدت ثابت را نشان می دهد برای اینکه درک به تری از اندازه ی شدت داشته باشید، اندازه ی آن را برای همین حالت در سمت - راست رسم کرده ایم (این محاسبه ها به طور - عددی و به وسیله ی نرم افزار *Mathematica* انجام شده است)، این شکل ها به ازای $f = 5.2 \text{ cm}$ ، $a = 0.1 \text{ cm}$ و $\lambda = 5.14 \times 10^{-5} \text{ cm}$ رسم شده اند.

است. توزیع - شدت، رابطه ی (12)، تنها به v و u وابسته بود اما رابطه ی (16) نشان می دهد که فاز برخلاف - شدت نه تنها به v و u بلکه به هندسه ی پراش نیز وابسته است. فاز در نقطه ی کانون برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. با استفاده از تقارن در روابط - (10) داریم:

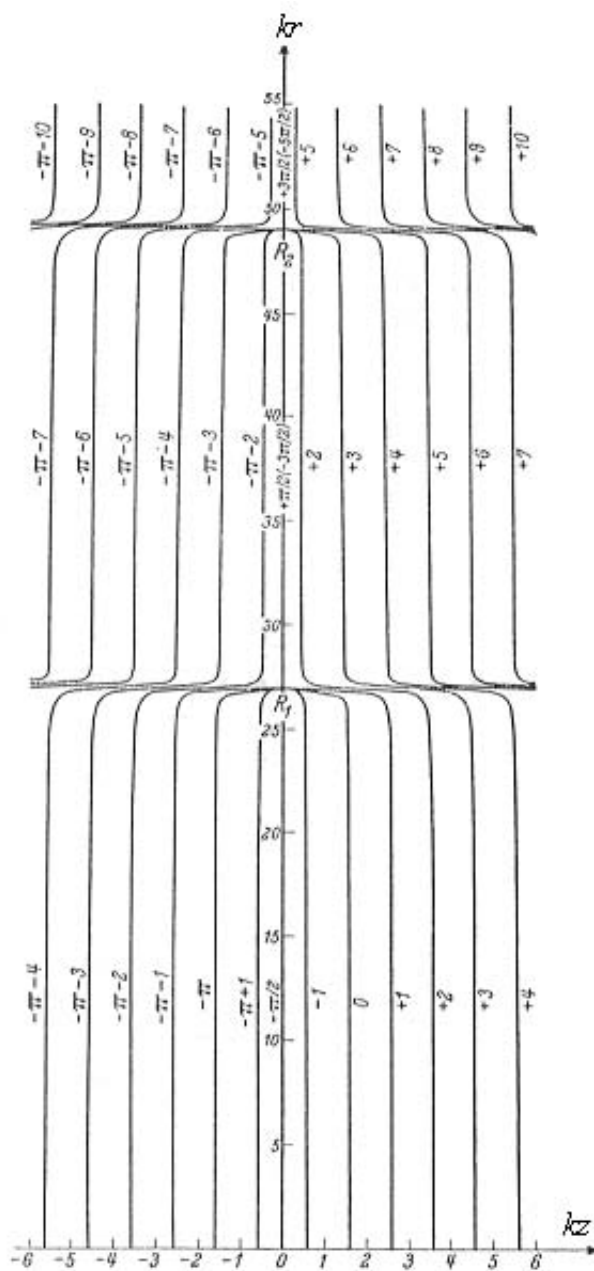
$$\varphi(v, u) + \varphi(v, -u) = -\pi. \quad (18)$$

یعنی تصویر - هر سطح - فاز ثابت ϕ_0 در صفحه ی کانون، یک سطح - فاز ثابت $\phi_0 - \pi$ است. در شکل - پنجم پربند های فاز ثابت در نزدیکی - نقطه ی کانون رسم شده است، به نظر می رسد که با نزدیک شدن - موج به کانون، سطوح - فاز ثابت تقریباً تخت هستند. شدت روی - سطح های فاز ثابت، یکنواخت نیست بلکه ممکن است تغییر کند⁵. در مکان - حلقه های تاریک - ایری [k]، فاز تغییرات - شدیدی خواهد داشت و مقدار - این فاز در این مکان نامشخص است که این نقاط را تکین - فازی⁶ می نامند.

⁵ به مکان - حلقه های تاریک - ایری [k] توجه کنید.

⁶ این تعریف در بخش - بعد اساسی است.

رفتار ناهنجار موج تک فام (و غیر تک فام) تخت در نزدیکی نقطه ی کانون



شکل ۴: سطوح فاز ثابت در شکل مشخص شده اند همان گونه که مشخص است این سطوح در دو مکان تغییرات شدیدی از خود نشان می دهند، که این مکان ها همان مکان حلقه های تاریک ایری [k] می باشد، در شکل، تا دو حلقه ی تاریک ایری [k] این تغییرات رسم شده است [2,3]. (این شکل به ازای $a = 2.5 \text{ cm}$, $f = 10 \text{ cm}$ و $\lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ رسم شده است.)

2.1 نابهنجاری فاز⁷

رفتار موج پراشیده شده به گونه ای است که در فواصل خیلی دور (در سمت چپ $u < 0$) شبیه به قطاری موج کروی است که به سمت نقطه ی کانون جمع می شود و سپس در سمت راست ($u > 0$) شبیه قطار موج کروی است که از نقطه ی کانون دور می شوند. همین شباهت باعث می شود تا فاز این موج پراشیده شده را نسبت به فاز یک موج کروی بسنجیم.

فاز موج کروی را به شکل زیر می توان نوشت:

$$\tilde{\varphi}(v, u) := \begin{cases} -kR & u < 0 \\ +kR & u \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

«ناهنجاری فاز» را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\delta := \varphi(v, u) + \tilde{\varphi}(v, u). \quad (20)$$

کاملاً واضح است که «ناهنجاری فاز» در کانون برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. در شکل ششم رفتار «ناهنجاری فاز» را به ازای باریکه هایی که تحت زاویه های مختلفی از کانون می گذرند رسم شده اند. این شکل هانشان می دهد که در عبور از کانون در راستای هر باریکه مقدار δ به طور پیوسته و ناگهانی به اندازه π تغییر می کند، این اثر اولین بار توسط گوی [c] مشاهده شد [6]. اما در راستای محور اپتیکی «ناهنجاری فاز» رفتاری تکین⁸ دارد و به طور دوره ای بین مقدار 0 و $-\pi$ تغییر می کند.

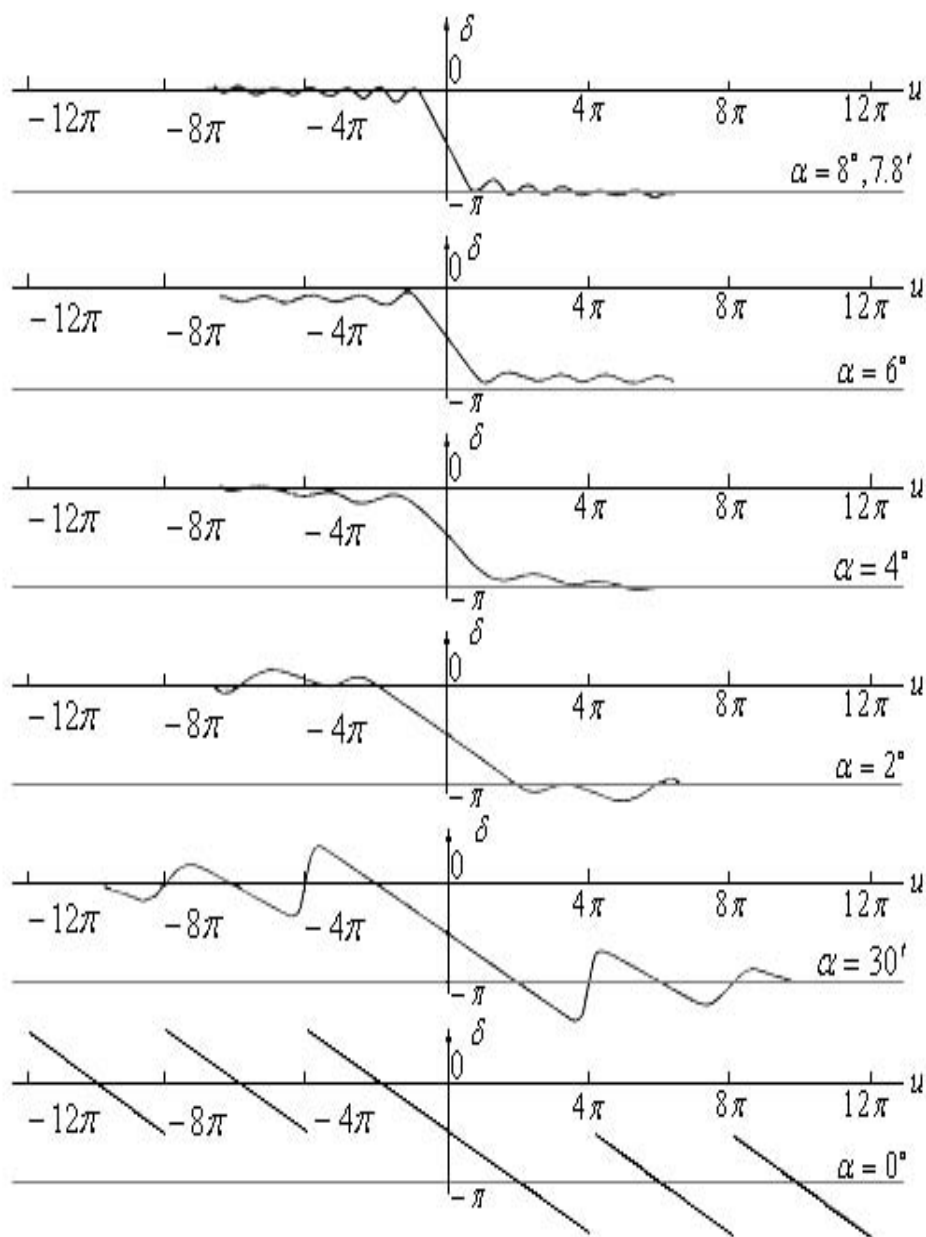
3 نابهنجاری طیف در نزدیکی نقطه ی تکین فاز

همان طور که در بخش قبل گفته شد، نقاطی که در آن ها دامنه ی میدان صفر است، فاز تکینه گی دارد یعنی در آن نقاط اندازه ی فاز کاملاً نامشخص است. پدیده های مربوط به تکینه گی های فاز در یک شاخه ی جدید از فیزیک به نام «اپتیک تکینه گی» در حال توسعه است [1]. در این مرحله ما رفتار طیفی گاوسی را در نزدیکی یک نقطه ی تکین فازی بررسی می کنیم [7,8]. فرض می کنیم که در معادله ی (1) موج فرودی

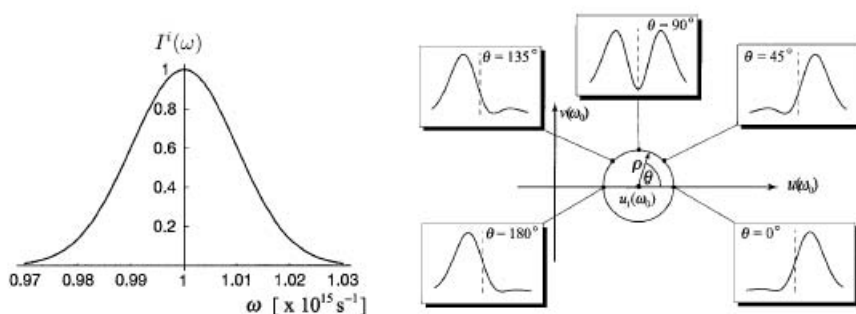
⁷ Phase Anomaly

⁸ این نقاط هم تکین فازی نامیده می شوند، زیرا در این نقاط شدت نور صفر است و فاز مقداری نامشخص دارد.

۱۰ رفتار نابهنجاری موج تک فام (و غیر تک فام) تخت در نزدیکی نقطه ی کانون



شکل ۵: رفتار «نابهنجاری - فاز» در طول باریکه هایی که از کانون عبور می کنند رسم شده است. α زاویه ی شیب باریکه را نسبت به محور اُپتیکی نشان می دهد [2,3]. این شکل به ازای $\lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ و $a = 2.5 \text{ cm}$ ، $f = 10 \text{ cm}$ رسم شده است.



شکل 6: شکل - سمت - چپ تابع - توزیع - فرکانسی - موج - فرودی (یا طیف - موج - فرودی) را نشان می‌دهد که به (1) بهنجار شده است. شکل - سمت - راست طیف - موج - پراشیده شده تحت - زوایای - خاص حول - یک نقطه ی تکین را نشان می‌دهد [7,8]. کاملاً مشخص است که این طیف از شکل - اولیه ی خود (که گاوسی است) خارج می‌شود و در نواحی از فضا طیف به سمت - آبی انتقال پیدا می‌کند (انتقال به آبی) و در نواحی دیگر از فضا طیف به سمت - قرمز انتقال پیدا می‌کند (انتقال به قرمز) و در ناحیه ای از فضا فرکانس - مرکزی حذف می‌شود.

دارای - پهنای - فرکانسی باشد. به گونه ای که تابع - توزیع - فرکانس گاوسی باشد:

$$\begin{aligned} A &:= A(\omega), \\ &= A_0 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\sigma^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن ω_0 فرکانس - مرکزی و σ انحراف معیار - این تابع است. در نتیجه شدت - نور - پراشیده شده در نقطه ی P برابر خواهد بود با:

$$I(v, u; \omega) = I^i(\omega) M(v, u; \omega). \quad (22)$$

که در آن $M(v, u; \omega)$ همان تابع - تعدیل کننده (ی طیف) است، این تابع نشان می‌دهد که شدت - طیف - ورودی ($I^i(\omega)$) چگونه توسط - پراش، تغییر می‌کند. وابسته گی - تابع - تعدیل کننده ی طیف به v و u نشان می‌دهد که طیف - میدان در ناحیه ی نزدیک - کانون در نقاط - مختلف متفاوت خواهد بود، همچنین این طیف ها با طیف - میدان ورودی فرق خواهد داشت. شکل - این طیف به ازای - مکان های مختلف حول - نقطه ی تکین - فازی در شکل - هفتم رسم شده است.

4 سپاس گذاری

لازم می دانیم از اساتید گرامی و بزرگوار، در مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه ی زنجان، آقایان دکتر حمیدرضا خالصی فرد و استاد محمدتقی توسلی به خاطر پیشنهاد های مفید و راهنمایی هایشان تشکر کنیم.

5 مرجع ها

- [1] For a review of singular optics see, for example, M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, Singular optics, in Progress in Optics, E. Wolf, ed. (Elsevier, Amsterdam, 2001), Vol. 42, pp. 219-276.
- [2] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, (Cambridge University Press), (1998), Chapter 8.
- [3] E. H. Linfoot and E. Wolf, Pro. Phys. Soc. B, **69** (1956), 827.
- [4] ابراهیم کریمی، حمیدرضا خالصی فرد، فریبا مصلحی. راد، مقاله نامه ی دهمین کنفرانس سالانه ی فوتونیک (ماهان) - انجمن فیزیک ایران (۱۳۸۲) صفحه ی ۴۰.
- [5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, 6th Edition, 937.
- [6] L. G. Gouy, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, **110** (1890), 1251.
- [7] G. Gbur, T.D. Visser, and E. Wolf, Phys. Rev. Lett. **88**, (2002) 013901.
- [8] G. Popescu and A. Dogariu, Phys. Rev. Lett. **88**, (2002) 183902.
- [9] W. Carter, Opt. Comm., **7** (1973), 218.
- [10] Y. Li and E. Wolf, J. Opt. Soc. Amer., **A1** (1984), 801.

6 اسم‌های خاص

- [a] Huygens
- [b] Fresnel
- [c] Gouy
- [d] Walker
- [e] Riche
- [f] Linfoot
- [g] Wolf
- [h] Carter
- [i] Lommel
- [j] Franhofer
- [k] Airy

EK-004 (2004/06/29)

The Behaviors of Monochromatic (Polychromatic) Plane Wave Near the Focal Point

Ebrahim Kraimi^{†,‡}

Fariba Moslehi Rad[†]

Hassan Hassan Abadi[‡]

[†] Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS) - Zanjan

[‡] Institute for High Education of ValiAsr - Tehran

[‡] Azad University of Zanjan - Zanjan

Abstract:

In this paper, we have studied the intensity and phase distribution of Monochromatic plane wave around the focal point that diffracted by a circle aperture. We obtained the amplitude of this wave by using of Huygens - Fresnel principle in free aberration imaging. We have drawn the counter of intensity and phase near the focal point.

Finally, we defined phase singularity and studied the behavior of polychromatic wave (with Gaussian distribution of frequency) around of phase singularities point.

Keyword: diffraction, Phase singularity point, Spectral modifier.