

EK-001 (2004/05/10)

پرتابه ی - کوانتومی

e_karimi@iasbs.ac.ir

fmrad@iasbs.ac.ir

hashemi@dena.sharif.edu

ابراهیم - کریمی

فریبا مصلحی - راد

سید محمد - هاشمی

در این مقاله به بررسی - حالت های - کوانتومی - نوترون ها در میدان - گرانشی - زمین پرداخته شده است. در بخش - اول، حرکت - یک پرتابه ی - نوترون ی را در میدان - گرانشی - زمین، از دید گاه - کلاسیکی و کوانتومی، بررسی نموده و در بخش - بعد کار - تجربی ی که توسط - گروه ی ی - فیزیک پیشه که در آزمایش گاه - لائو-لانگوین [a] انجام شده، آورده شده است. در نهایت نتایج این کارها را باهم مقایسه می کنیم.

0 مقدمه

آشکارشدن - آثار - کوانتومی در بسیاری از پدیده های - فیزیکی تجربه شده است، هر ذره ای ی که در یک چاه - پتانسیل - به اندازه ی کافی عمیق و عریض قرار بگیرد، در یک حالت - کوانتومی - مقید قرار می گیرد، به عنوان - مثال، وجود - حالت های - کوانتومی برای - یک الکترون در یک میدان - مغناطیسی از ساختار - اتمی نتیجه می شود. هم چنین، حالت های - پایه برای - نوکلئون ها در یک میدان - بزرگ - هسته ای نیز از ساختار - اتمی - هسته به دست می آید. با یک تحلیل - مشابه به این نتیجه می رسیم که میدان -

گرانشی در برابر نیروهای الکترومغناطیسی و هسته‌ای بسیار ضعیف تر است، بنابراین برای مشاهده ی این حالت های مقید در میدان گرانشی، می‌بایست ی برهم‌کنش ذره ی مورد نظر با بقیه ی میدان ها را از بین ببریم به گونه‌ای که سهم آن‌ها آن قدر کوچک باشد که دخالت ی در آثار کوانتومی میدان گرانشی نداشته باشد. پس باید دنبال ذره ای ی بگردیم که برهم‌کنش ی غیراز گرانشی را احساس نکند، در ضمن جرم آن، آن قدر کوچک باشد تا آثار کوانتومی را احساس کند، بهترین کاندیدا برا ی انجام چنین آزمایشی نوترون می‌باشد، زیرا:

- بار نوترون صفر است.
- نیمه عمر نوترون بالا است.
- نوترون، یک ذره ی بنیادی با جرم پایین است.

اما نیروی پتانسیل گرانشی زمین به تنهای ی نمی‌تواند یک چاه پتانسیل برا ی ذرات بسازد. زیرا این میدان فقط ذرات را محدود می‌کند تا در راستا ی میدان گرانشی سقوط کنند، بنابراین به دیواره ای نیاز داریم تا یک چاه پتانسیل (هم راه با میدان گرانشی) ایجاد کند، برا ی این منظور از یک سطح آینه‌ای ی بازتاب‌نده ی نوترون ها استفاده می‌کنیم.

1 بررسی حرکت پرتابی

1.1 دیدگاه کوانتومی

هرگاه نوترون به‌طور قائم بر روی سطح بازتاب‌نده رها شود، موج نوترونی از سطح بازتابیده و با خود ش تداخل می‌کند، در نتیجه یک موج ایستاده از نوترون تشکیل می‌شود. احتمال یافتن نوترون در یک ارتفاع خاص وابسته به یک عدد کوانتومی است که حالت های مقید نوترون را در این میدان مشخص می‌کند برا ی به دست آوردن تابع احتمال نوترون در این میدان بایست ی معادله ی شرودینگر [b] (هم راه با شرایط مرزی مناسب) را برا ی این نوترون حل کنیم [1]:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz\right)\psi(z; t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z; t), \quad (1)$$

که در آن m جرم - نوترون و $\psi(z; t)$ تابع - موج - نوترون در مکان z - و زمان t است. بهتر است معادله‌ی شرودینگر [b] را به وسیله‌ی پارامترهای - مقیاس ℓ و τ که به ترتیب دارای - دیمانسیون - طول و زمان هستند، بی‌بعد کنیم:

$$\begin{cases} \tau := \left(\frac{2\hbar}{mg^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \ell := \frac{1}{2}g\tau^2. \end{cases} \quad (2)$$

به همین منظور کمیت‌های - بی‌بعد Z و T را تعریف نموده و سعی می‌کنیم تا معادله‌ی شرودینگر [b] را برحسب - آنها بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} Z := \frac{z}{\ell}, \\ T := \frac{t}{\tau}. \end{cases} \quad (3)$$

و از آن جا:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial Z^2} + Z\right)\psi(Z; T) = i\frac{\partial}{\partial T}\psi(Z; T), \quad (4)$$

متغیرهای - جدید Z و T مستقل ازهم هستند، از روش - جدا سازی - متغیرها استفاده می‌کنیم.

$$\psi(Z; T) = e^{-i\omega T} f(Z). \quad (5)$$

که در آن $f(Z)$ در معادله‌ی - ایری [c] صدق می‌کند:

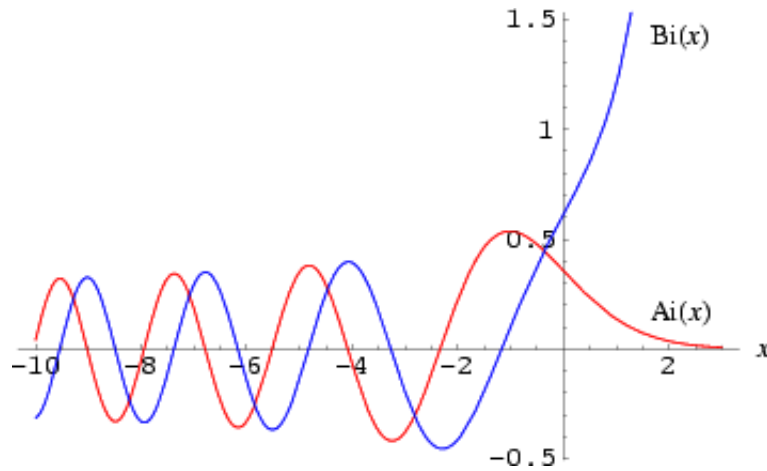
$$-\frac{d^2}{dZ^2}f(Z) + (Z - \omega)f(Z) = 0. \quad (6)$$

و انرژی - ذرات برابر است با ϵ :

$$\epsilon := \hbar\omega. \quad (7)$$

جواب‌های - معادله‌ی - ایری [c] به صورت - زیر است:

$$f(Z) = c_1 Ai(Z - \omega) + c_2 Bi(Z - \omega). \quad (8)$$



شکل ۱: توابع ایری $Ai(x)$ و $Bi(x)$ ، برحسب متغیرشان x در بازه ی $[-10, +2]$ رسم شده است [2].

که در آن $Ai(x)$ و $Bi(x)$ جواب های معادله ی ایری [c] (6) هستند که تغییرات آن ها برحسب متغیرشان در شکل ۱ رسم شده است [2].
حال شرایط مرزی زیر را اعمال می کنیم:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \psi(z; t) = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \psi(z; t) = 0. \quad (9)$$

از آن جا به دست خواهیم آورد:

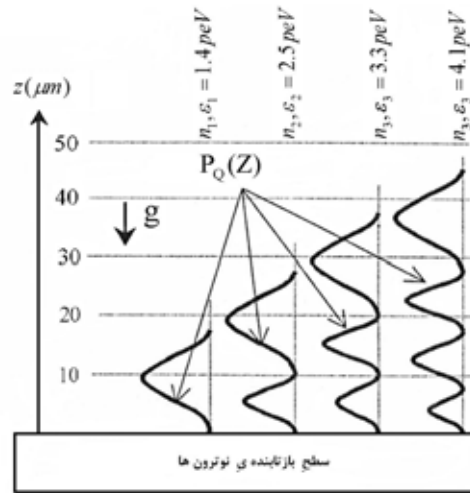
$$\psi(Z; T) = c_1 e^{-i\omega T} Ai(Z - \omega). \quad (10)$$

شرط اول مقادیر انرژی را معین می کند.

$$Ai(-\omega) = 0 \quad \implies \quad \omega_n \in \{AiryAiZeros\}. \quad (11)$$

در نتیجه از رابطه ی (7) انرژی نوترون ها به صورت گسسته ی زیر در خواهد آمد:

$$\epsilon_n = -\hbar \times \{AiryAiZeros\}. \quad (12)$$



شکل ۲: احتمال پیدا کردن نوترون ها بر حسب ارتفاع z نشان داده شده است [3].

که در آن $\{AiryAiZeros\}$ نقاطی را مشخص می کند که در آن تابع ایری $Ai(x)$ صفر می شود. تابع (کوانتومی) احتمال وجود نوترون در مکان Z به صورت زیر است [1]:

$$P_Q(Z) := \|\psi(Z; T)\|^2,$$

$$:= \|e_1 Ai(Z - \omega)\|^2. \tag{13}$$

در شکل ۲، حالت های کوانتومی و تابع احتمال وجود نوترون در نقاط مختلف برای چهار حالت کوانتومی مختلف رسم شده است. میدان گرانشی خیلی ضعیف است، یکی از شواهد این امر در شکل بالا مشخص است زیرا در ترازهای بالا تر احتمال وجود نوترون های با انرژی بالا تر بیشتر است. بنابراین منطقی است که احتمال وجود نوترون ها به سمت بالا تغییر شکل دهد. هم چنین اختلاف انرژی بین حالت های که از نظر عدد کوانتومی نزدیک به هم هستند با بالا رفتن عدد کوانتومی کوچک تر می شود.

1.2 دیدگاه کلاسیکی

فرض کنید نوترون ی را تا ارتفاع H بالا آورده و آن را به طور عمودی روی سطح بازتابنده رها می‌کنیم (شکل ۳). از دید کلاسیکی می‌توان تابعی را چنان تعریف نمود که اگر در المان مکان dz ضرب شود احتمال حضور ذره ی کلاسیک را در فاصله ی بین z و $z + dz$ به دهد، بدیهی است که احتمال یافتن ذره در یک مکان با سرعت ذره نسبت عکس دارد:

$$P_C(z) := \frac{C}{V(z)}. \quad (14)$$

که در آن $P_C(z)$ و C به ترتیب تابع (کلاسیکی) احتمال و ثابت به هنجارش هستند. با استفاده از پایستگی انرژی، سرعت ذره در مکان z برابر خواهد بود با:

$$V(z) = \pm \sqrt{2g(H-h)}. \quad (15)$$

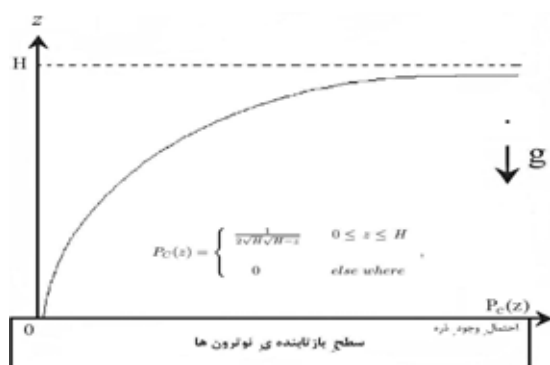
با استفاده از به هنجارش، $\int_{-\infty}^{+\infty} P_C(z) dz = 1$ ، تابع احتمال به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$P_C(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{H}\sqrt{H-z}} & 0 \leq z \leq H \\ 0 & \text{else where} \end{cases}, \quad (16)$$

نمایش تابع احتمال برحسب ارتفاع از سطح آینه ی بازتابنده در شکل ۳ رسم شده است.

2 نتایج آزمایش گاهی

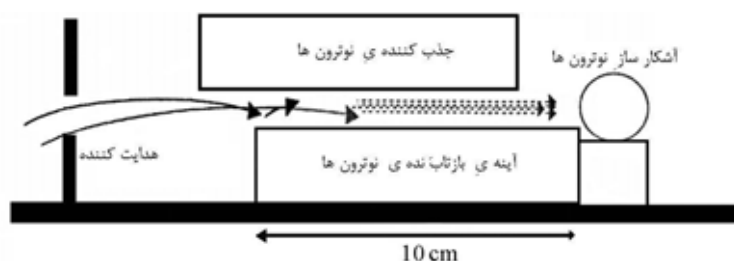
در یک آزمایش واقعی نمی‌توان یک نوترون را جدا نمود و اجازه داد تا آزادانه روی سطحی آینه ای سقوط کند، سپس چگالی آن را برحسب تابعی از ارتفاع از سطح آینه ای بیان کرد. به همین دلیل یک پرتوی نوترونی را انتخاب نموده و اجازه می‌دیم تا به صورت افقی حرکت کند، اگر در بالای سطح بازتابنده ی نوترون ها تمام نیروها به استثنای نیروی گرانشی (و نیروی بازتابش سطح آینه ای) حذف شوند، آن گاه



شکل ۳: تابع (کلاسیکی) احتمال وجود ذره، $P_C(z)$ ، برحسب مکان (z) رسم شده است.

حرکت نوترون ها را به صورت دو حرکت مستقل عمودی و افقی می توان تجزیه کرد. نیروی گرانشی تنها بر روی مؤلفه عمودی سرعت اثر دارد و در این راستا (هم راه با سطح آینه ای) یک چاه پتانسیل به وجود می آورد. در گریبل $[d]$ در مرکز لائو-لنگوین $[a]$ به وسیله چشمه های نوترونی فوق سرد، نوترون های با سرعتی در حدود $10 \frac{m}{s}$ ایجاد کرده اند که به وسیله یک هدایت کننده روی سطحی آینه ای به طول 10 cm هدایت کردند [3]. اگر اجازه دهیم که نوترون ها به سمت بالا جهش پیدا کنند، آن ها یک مسیر سهمی شکل که ناشی از گرانش می باشد، طی خواهند کرد. از دیدگاه کلاسیک در جای که بیشینه سهمی است، مؤلفه عمودی سرعت صفر خواهد شد و سپس افزایش خواهد یافت، برای این که مؤلفه عمودی سرعت را محدود کنند از یک جذب کننده نوترون که موازی با آینه ای بازتابنده بود استفاده کردند. فاصله میان جذب کننده و سطح آینه ای بازتابنده قابل تنظیم بود تا به وسیله آن یک ارتفاع خاص را بررسی کنند (شکل ۴).

در این آزمایش، نوترون ها بین آینه پایینی و جذب کننده بالایی در جریان هستند، فرض کنید h فاصله بین آینه و جذب کننده نوترون ها باشد. تعداد نوترون های دریافتی (N) به صورت تابعی از h اندازه گیری می شود در واقع مؤلفه عمودی سرعت به وسیله پارامتر h مشخص می شود. برای این که مؤلفه عمودی و افقی سرعت جدا از هم باشند می بایست در کیفیت و تنظیم قسمت های

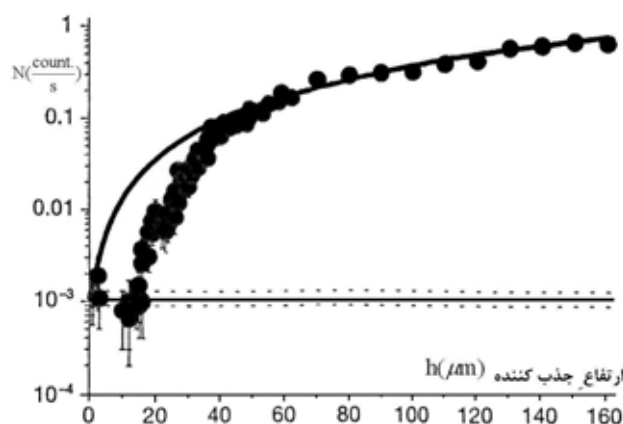


شکل ۴: چیده مان - آزمایشی - که در مرکز - تحقیقاتی لائو-لنگوین [a] انجام شده است [3].

مختلف - چیده مان - به کار رفته محدودیت های را اعمال کنیم.

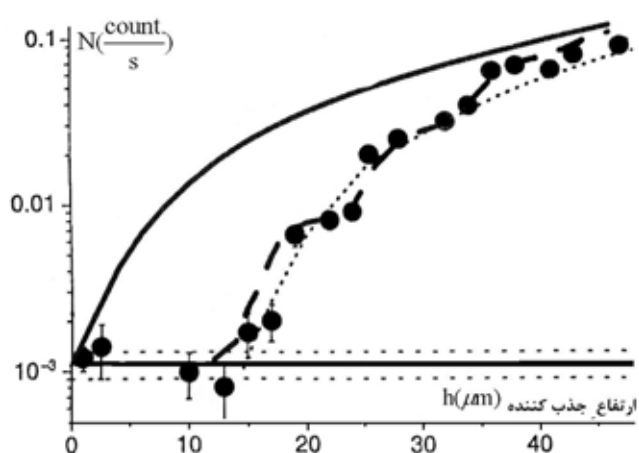
اگر h کوچک تر از پهنای - پایین ترین حالت - کوانتومی باشد، (N) باید صفر شود، حال شروع به افزایش h می کنیم سپس شمار - نوترون های - دریافتی را بر حسب h اندازه گیری می کنیم (به عبارتی همان تابع - احتمال وجود - نوترون ها در ارتفاع h). وقتی h مساوی - پهنای - پایین ترین حالت - کوانتومی ($n = 1$) باشد، (N) باید به صورت - شدید (تیز) افزایش یابد تا زمان ی که h از پهنای - دومین حالت - کوانتومی کوچک تر است، افزایش h تأثیری در شمار - نوترون های - دریافتی ندارد و مقدار - (N) ثابت است. به همین ترتیب رفتار - کوانتومی - نوترون در میدان - گرانشی در h های - کوچک دیده می شود اما اگر h به اندازه ی - کافی بزرگ شود، وابسته گی کلاسیکی (N) باید متناسب با h باشد و افزایش های - «گام به گام» - (N) از بین رود، اما در واقع به دلیل - وابسته گی - h به سرعت های - مجاز (یا بالعکس) برای - انتشار در پهنای - شکاف - جذب کننده و آینه، این وابسته گی به صورت $h^{\frac{3}{2}}$ خواهد بود. نتایج - آزمایش گاه ی در شکل های ۵ و ۶ نشان داده شده است.

همان طور که اشاره شد، اگر پهنای - شکاف کوچک تر از پهنای - فضای ی پایین ترین حالت - کوانتومی باشد، ناشفاف بودن - شکاف برای - نوترون ها به طور - واضح مشاهده می شود در صورتی که «قطر» یک نوترون در حدود $10^{-9} \mu m$ است که بسیار کوچک تر از پهنای ی است که شکاف برای - نوترون ها شروع به شفاف شدن می کند (این پهنای در حدود $15 \mu m$) باز شود هنوز برای - نوترون ها شفاف نیست اما به اندازه ای بزرگ است که می توانیم عبور - نور مرئی را مشاهده کنیم - طول - موج - نور - مرئی تقریباً 60



شکل ۵: منحنی دریافت نوترون بر حسب ارتفاع جذب کننده از آینه ی بازتابنده ی امواج نوترونی در صفحه ی نیم لگاریتمی رسم شده است. دایره ها، نقاط تجربی هستند، منحنی ای که با خط پُر نمایش داده شده است منحنی کلاسیکی است، خط های صاف افقی مقادیر مربوط به زمینه ی آشکار ساز و عدم قطعیت اندازه گیری شده در هنگام خاموش بودن چشمه ی نوترونی را نشان می دهد [3].

برابر طول موج نوترون ها است — این مشاهده دلیل ی بر این واقعیت است که شکاف واقعاً باز شده است و قابل تنظیم است. تحلیل دقیق آزمایش به ما اجازه می دهد که احتمال هر گونه خطای سیستماتیک را در این آزمایش از بین ببریم، بدیهی است که اختلاف در نتایج دریافت نوترون ها از این واقعیت ناشی می شود که میدان گرانشی زمین روی نوترون های داخل چارچوب چیده مان آزمایش به طور قابل توجهی عمل نمی کند. مشاهده ی آزمایش گاهی در مورد حالت های کوانتومی نوترون ها در میدان گرانشی زمین یک اثبات «عام» از خواص کوانتومی ماده است که با نظریه ی کلاسیک و کوانتومی ای که در بخش 1 بیان شد، مطابقت دارد. پدیده ای که در این مقاله بیان شد، می تواند پایه ی تحقیق های مربوط به خواص اساسی ماده باشد، مثلاً استفاده از گذارهای تشدید بی بین چنین تراز های باریکی می تواند تحلیل دقیق ی از تناسب بین جرم های لختی و گرانشی مربوط به ذرات بنیادی (از جمله نوترون) و هم چنین بررسی خنثا بودن بار الکتریکی نوترون ها را که چندان بدیهی نیست، ارائه داد.



شکل ۶: منحنی دریافت نوترون بر حسب مقادیر کوچک ارتفاع جذب کننده از آینه ی بازتابنده، در صفحه ی نیم لگاریتمی رسم شده است. «دایره ها»، نقاط تجربی هستند، منحنی ای که با «خط تیره» نشان داده شده، منطبق بر محاسبات کوانتومی است، منحنی ای که با «خط پُر» نمایش داده شده است، رفتار کلاسیکی را نشان می دهد، خط های صاف افقی مقادیر مربوط به زمینه ی آشکار ساز و عدم قطعیت اندازه گیری شده در هنگام خاموش بودن چشمه ی نوترونی را نشان می دهد [3].

3 مراجعها

- [1] R. Shankar; “Principle of Quantum Mechanics”, 2rd edition (Plenum Press, 1994) chapter 5.
- [2] <http://mathword.wolfram.com/AiryFunctions.html> .
- [3] Valery V.Nesvizhevsky et all; “Nature”, Vol 415 ,January 2002.

4 اسمها ي خاص

- [a] Laue-Langevin
- [b] Schrödinger
- [c] Airy
- [d] Grenoble