UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL VALLEJO
ÁREA DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Las formulas de integración inmediatas son muy limitadas en cuanto el número de funciones que pueden presentarse en los problemas de aplicación. Las integrales vistas hasta el momento son útiles pues permiten integrar una suma de términos, integrando separadamente cada termino, un producto de una constante por una función, extrayendo la constante del símbolo de integración y multiplicando la integral de la función por dicha constante, etc. Sin embrago su aplicación es muy restringida. Estas fórmulas pueden extenderse considerablemente mediante un artificio llamado sustitución.

Con relación a esto, consideremos primero el problema de encontrar la integral de la función $\left(x+2\right)^3$, este problema podemos resolverlo desarrollando el binomio al cubo para obtener y luego integrar término por término, sin embargo intentaremos encontrar un proceso más ágil haciendo algunas consideraciones.

Lo que necesitamos hacer es suponer una función cuya derivada sea $\left(x+2\right)^3$, si esta función fuera u^3, sabemos que su integral sería $\frac{u^4}{4}+C$, esto nos sugiere hacer $u=x+2$ y calcular esta integral como si fuera u^3 y para obtener como resultado

$$\frac{u^4}{4}+C=\frac{(x+2)^4}{4}+C.$$

De esta forma hemos encontrado la integral es la función F(x) $=\frac{(x+2)^4}{4}+C$.

Con lo cual hemos resuelto el problema, y por consiguiente:

$$\int\left(x+2\right)^2dx=\frac{(x+2)^4}{4}+C$$

Ejemplo 1. Ahora consideremos que tenemos que realizar la siguiente integral:

$$\int \left(2x^3 + 5x\right)^4 (6x^2 + 5)dx \qquad (0.1)$$

Esta integral se puede también resolver desarrollando el binomio a la cuarta potencia y después realizando el producto con el segundo y por ultimo realizar la integral de cada uno de los términos. Este proceso es muy largo y tedioso, por lo que es necesario ver la integral desde otra perspectiva, la cual consiste en buscar una forma alternativa más simple, como en el caso anterior sustituir algún(os) término(s) por una nueva variable.

Para encontrar la forma alternativa, Identificamos a u como aquella expresión que está encerrada entre paréntesis y elevada a la cuarta potencia por lo que $u = 2x^3 + 5x$, pero debemos verificar el tener todos los elementos necesarios para hacer una sustitución completa y adecuada, obteniendo una versión simplificada del problema.

Debemos de hacer notar que

1.- Para poder integrar con respecto a u, debemos primero eliminar todas las $x's$ del integrando. Si no podemos lograr esto, es posible que hayamos seleccionado erróneamente la expresión seleccionada como u.

Para lograr esto debemos primero determinar u, después determinar su diferencial y por último el determinar a partir la diferencial de u, la diferencial dx

Es decir haciendo

$$u = 2x^3 + 5x \qquad (0.2)$$

Obteniendo la diferencial de u

$$du = (6x^2 + 5)dx \qquad (0.3)$$

Despejando dx de (0.3), obtenemos:

$$dx = \frac{du}{6x^2 + 5} \qquad (0.4)$$

Sustituyendo (0.2) y (0.4) en (0.1) y simplificando

$$\int u^4 (6x^2 + 5)\frac{du}{6x^2 + 5} = \int u^4 du \qquad (0.5)$$

Por lo que: $\int \left(2x^3 + 5x\right)^4 (6x^2 + 5)dx = \int u^4 du$

La sustitución hace que la integral sea sencilla de realizar, ya que:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C \qquad (0.6)$$

2.- Después de integrar la expresión en u, debemos sustituir esta por aquella expresión que involucra a las $x's$.
Es decir; una vez resuelta la integral restituimos la función original que depende de x reemplazando u, por $2x^3+5x$ con lo que:

$$\int \left(2x^3+5x\right)^4 (6x^2+5)dx = \frac{(2x^3+5x)^5}{5} + C$$

<u>Ejemplo 2</u>. Determinar la siguiente integral:

$$\int \sqrt{10x-12}\ dx \qquad (0.7)$$

Considerando que $10x-12$, es la expresión que está elevada a la potencia (1/2), tomaremos como u, a ésta expresión, con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} u &= 10x-12 \\ du &= 10dx \\ \therefore\ dx &= \frac{du}{10} \end{aligned} \qquad (0.8)$$

Sustituyendo ***u*** y ***dx*** de (0.8) en (0.7), obtenemos:

$$\int u^{1/2} \frac{du}{10} = \frac{1}{10}\int u^{1/2} du \qquad (0.9)$$

La sustitución simplifica la integral a una expresión sencilla de integrar:

$$\frac{1}{10}\int u^{1/2} du = \frac{1}{10}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{15}u^{3/2} + C \qquad (0.10)$$

Una vez resuelta la integral restituimos la función original que depende de x reemplazando u, por $10x-12$ con lo que:

$$\int \sqrt{10x-12}\ dx = \frac{1}{15}(10x-2x)^{3/2} + C \qquad (0.11)$$

Para reconocer cuando utilizar una sustitución, es conveniente el diferenciar la expresión dada en lugar de integrarla. Si la diferenciación de la expresión integrando, requiera el uso de la regla de la cadena, entonces realizar la integral puede requerir de la sustitución, por ejemplo para derivar las siguientes expresiones: $x(5x^2-4)^3$ o $(x^2+2x)e^{x^3+3x^2+1}$, es necesario la aplicación de la regla de la cadena, por lo que si quisiéramos integrar estas expresiones tendríamos que utilizar el método de sustitución.

Cuando utilicemos sustitución, primero debemos revisar el problema para identificar correctamente la expresión que consideraremos como u.

El uso de esta técnica demanda cierta experiencia, pero la habilidad se obtiene resolviendo una buena cantidad de problemas.

Debemos tomar en cuenta las siguientes sugerencias para aplicar el método de sustitución:

1. Para elegir la sustitución *u=g(x),* en general conviene elegir la parte interna de algún termino compuesto, es decir aquella expresión que esté elevada a alguna potencia, que esté en el interior de una raíz, que divida a otra expresión, que sea el argumento de alguna función trigonométrica,
2. Calcular *du=g'(x)dx,* que consiste en la derivada de *g(x)* multiplicada por *dx.*
3. Despejar de *du=g'(x)dx,* a *dx*
4. Reescribir la integral en términos de *u.*
5. Encontrar la integral resultante en términos de *u*
6. Sustituir *u por g(x)* para obtener la integral en términos de *x*
7. Verificar si es posible el resultado por derivación.

Si al revisar la expresión por integrar podemos intuir que podemos utilizar el método de sustitución, ¿Qué debemos hacer para determinar u?

Aunque no hay reglas generales o definitivas para determinar a u, algunos procedimientos comunes son los siguientes:

1.- Si identificamos una expresión lineal elevada a una potencia, podemos tomar como u a esta expresión lineal, por ejemplo: en la expresión $\sqrt{9x-5}$, tomaremos $u=9x-5$

Es decir para realizare la integral;

$$\int \sqrt{9x-5}\cdot dx \tag{1.1}$$

Al tomar en cuenta la sugerencia propuesta obtenemos:

$$\begin{aligned} u &= 9x-5 \\ du &= 9dx \\ \therefore \quad dx &= \frac{du}{9} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sustituyendo u y dx obtenida en (1.2) en (1.1) obtenemos:

$$\int u^{1/2}\frac{du}{9}=\frac{1}{9}\int u^{1/2}du \tag{1.3}$$

La integral de esta expresión la obtendremos al aplicar la regla: $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

$$\frac{1}{9}\int u^{1/2}du=\frac{1}{9}\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{27}u^{3/2}+C \tag{1.4}$$

Sustituyendo finalmente a la ***u*** por $u=9x-5$, en (1.4), obtendremos el resultado final de la integral.

$$\int \sqrt{9x-5}dx=\frac{2}{27}(9x-5)^{3/2}+C=\frac{2}{27}\left(\sqrt{9x-5}\right)^{3}+C \tag{1.5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento descrito determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int (10x-9)^8 dx$

2) $\int (3-3x)^{-3} dx$

3) $\int 7\sqrt{5-2x}dx$

4) $\int \left(5-\frac{x}{10}\right)^4 dx$

5) $\int \frac{4}{\sqrt[3]{3+2x}}dx$

6) $\int \frac{10dx}{(4x-8)}dx$

7) $\int 2\sqrt[3]{8-x}\cdot dx$

8) $\int \sqrt{ax+b}\cdot dx$

2.- Si descubrimos una constante elevada a una expresión lineal en x, consideremos como u a la expresión lineal. Por ejemplo en la expresión 7^{4x-3}, se invita a establecer $u = 4x - 3$

Es decir para determinar la integral:

$$\int 7^{4x-3}dx \tag{2.1}$$

Y siguiendo la recomendación obtenemos:

$$\begin{aligned} &u = 4x - 3 \\ &du = 4dx \\ &\therefore \quad dx = \frac{du}{4} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sustituyendo u y dx de (2.2) en (2.1) obtenemos:

$$\int 7^{4x-3}dx = \int 7^u \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int 7^u\,du \tag{2.3}$$

El resultado final lo obtendremos al aplicar la regla: $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

$$\frac{1}{4}\int 7^u\,du = \frac{1}{4}\frac{7^u}{\ln 7} + C \tag{2.4}$$

Remplazando $u = 4x - 3$ en (2.4), obtenemos el resultado final.

$$\int 7^{4x-3}dx = \frac{7^{4x-3}}{4 \cdot \ln 7} + C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento mostrado determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int e^{-3x+1}dx$

2) $\int 5^{4x+2}dx$

3) $\int \frac{2dx}{3^{2x+9}}$

4) $\int \pi^{-x/2}dx$

5) $\int 7e^{6x+3}dx$

6) $\int 4^{1-4x}dx$

7) $\int \frac{5dx}{e^{2x+5}}$

8) $\int \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} dx$

3.- Si descubrimos una expresión elevada a una potencia multiplicada por la derivada de esta expresión (o un múltiplo de la derivada), asignemos a u esta expresión. Por ejemplo: en la término $\frac{x^3}{\left(3x^4-5\right)^3}$, que lo podemos reescribir como: $x^3(3x^4-5)^{-3}$, podemos considerar $u=3x^4-5$.

Es decir para determinar el resultado de integrar:

$$\int \frac{x^3}{(3x^4-5)^3}dx=\int x^3(3x^4-5)^{-3}dx \qquad (3.1)$$

Y haciendo uso de la consideración tomada tendremos:

$$\begin{aligned} u&=3x^4-5\\ du&=12x^3dx \qquad (3.2)\\ \therefore \quad dx&=\frac{du}{12x^3}\end{aligned}$$

Sustituyendo u y dx de (3.2) en (3.1) y simplificando hasta donde sea posible, obtenemos:

$$\int \cancel{x^3}u^{-3}\frac{du}{12\cancel{x^3}}=\frac{1}{12}\int u^{-3}du \qquad (3.3)$$

La integral de esta expresión la obtendremos aplicando la regla: $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

$$\frac{1}{12}\int u^{-3}du=\frac{1}{12}\frac{u^{-3+1}}{(-3+1)}+C=-\frac{1}{24\cdot u^2}+C \qquad (3.4)$$

Reemplazando finalmente a la ***u*** por $u=3x^4-5$, en (3.4), obtendremos el resultado final de la integral.

$$\int \frac{x^3}{(3x^4-5)^3}dx=-\frac{1}{24(3x^4-5)^2}+C \qquad (3.5)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento expuesto determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int x\left(4x^2-7\right)^3dx$

2) $\int \frac{3x}{\left(5x^2+8\right)^4}dx$

3) $\int 5x\sqrt[3]{7x^2+11}dx$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

5) $\int \frac{-2x-1}{\left(x^2+x+3\right)^5}dx$

6) $\int \left(x^3-x^2\right)\left(3x^4-4x^3\right)^6dx$

7) $\int \frac{2\left(x^2+x^5\right)}{\sqrt[4]{2x^3+x^6-15}}dx$

8) $\int \frac{4\left(x^3-x^4\right)}{\left(5x^4-4x^5\right)^3}dx$

4.- Si detectamos una constante elevada a una expresión, multiplicada por la derivada de esta expresión (o un múltiplo de su derivada), se sugiere asignar a ***u*** esta expresión: Por ejemplo: en el termino $4(x^2+1)e^{x^3+3x+2}$, se sugiere $u = x^3+3x+2$

Es decir: la integral de la función:

$$\int 4(x^2+1)e^{x^3+3x+2}dx \qquad (4.1)$$

Sugiere realizar el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} &u = x^3+3x+2 \\ &du = (3x^2+3)dx = 3(x^2+1)dx \qquad (4.2) \\ &\therefore \quad dx = \frac{du}{3(x^2+1)} \end{aligned}$$

Sustituyendo u y dx de (4.2) en (4.1), obtenemos:

$$\int 4(x^2+1)e^{x^3+3x+2}dx = \int 4\cancel{(x^2+1)}e^u \frac{du}{3\cancel{(x^2+1)}} = \frac{4}{3}\int e^u du \qquad (4.3)$$

Aplicando la regla de integración $\int e^u du = e^u + c$

Con lo que:

$$\frac{4}{3}\int e^u du = \frac{4}{3}e^u + C \qquad (4.4)$$

Sustituyendo u por x^3+3x+2 en (4.4), obtenemos el resultado final:

$$\int 4(x^2+1)e^{x^3+3x+2}dx = \frac{4}{3}e^{x^3+3x+2} + C \qquad (4.5)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento explicado determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int 3xe^{x^2}dx$

2) $\int \frac{4e^{-1/x}}{x^2}dx$

3) $\int x\cdot 2^{3x^2-4}dx$

4) $\int \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

5) $\int 6^{senx}\cos x\cdot dx$

6) $\int \frac{x}{10^{x^2}}dx$

7) $\int 3(1+x)e^{-(x^2+2x)}dx$

8) $\int x^2\pi^{2x^3+1}dx$

5.- Si observamos una expresión (posiblemente elevada a alguna potencia) en el denominador y su derivada (o un múltiplo de la derivada) en el numerador, se sugiere tomar como u a esta expresión Por ejemplo en la expresión: $\frac{x^2-2}{x^3-6x}$, se sugiere tomar $u = x^3 - 6x$

Es decir al evaluar la integral;

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-6x}dx \qquad (5.1)$$

Al tomar la expresión sugerida;

$$u = x^3 - 6x$$
$$du = \left(3x^2-6\right)dx = 3\left(x^2-2\right)dx \qquad (5.2)$$
$$\therefore \quad dx = \frac{du}{3(x^2-2)}$$

Sustituyendo tanto a u como la diferencial de x en (5.2), y simplificando:

$$\int \frac{\cancel{x^2-2}}{u}\frac{du}{3\cancel{(x^2-2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} \qquad (5.3)$$

Podemos integrar esta expresión mediante la regla: $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

Con lo que:

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + c = \ln \sqrt[3]{u} + C \qquad (5.4)$$

Sustituyendo finalmente a la ***u*** por $u = x^3 - 6x$, en (5.4), obtendremos el resultado final para esta integral;

$$\int \frac{x^2-2}{x^3-6x}dx = \ln \sqrt[3]{x^3-6x} + C \qquad (5.5)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento presentado determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int \frac{x^3-x^2}{3x^4-4x^3}dx$

2) $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}dx$

3) $\int \frac{x}{4+x^2}dx$

4) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

5) $\int \frac{2x-1}{2x^2-2x+5}dx$

6) $\int \frac{x^2}{3x^3-9}dx$

7) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

8) $\int \frac{5(x-3)}{x^2-6x+5}dx$

6.- Si en integrales que contienen funciones trigonométricas, podemos identificar que esta función está multiplicada por la derivada de su argumento (a algún múltiplo de esta derivada), se sugiere tomar como ***u*** al argumento de la función.

Por ejemplo, en la expresión $3x\cos(x^2+9)$ se sugiere considerar como el argumento del coseno, es decir $u = x^2 + 9$

Es decir en la integral;

$$\int 3x\cos(x^2+9)dx \qquad (6.1)$$

Se sugiere:

$$\begin{aligned} u &= x^2+9 \\ du &= 2xdx \qquad (6.2) \\ \therefore \quad dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo tanto a u como la diferencial de x en (6.2), y simplificando:

$$\int 3\cancel{x}\cos u\cdot\frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}\int \cos u\cdot du \qquad (6.3)$$

Integrando esta expresión mediante la regla: $\int \cos u = sen\ u + C$

$$\frac{3}{2}\int \cos u\ du = \frac{3}{2} sen\ u + C \qquad (6.4)$$

Sustituyendo finalmente a la ***u*** por $u = x^2 + 9$, en (6.4), obtendremos el resultado final para esta integral;

$$\int 3x\cos(x^2+9)dx = \frac{3}{2} sen(x^2+9) + C \qquad (6.5)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el procedimiento mostrado determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int \cos(2-4x)dx$

2) $\int sen(5-\frac{2x}{3})dx$

3) $\int x^2 \tan\frac{x^3}{3}dx$

4) $\int (4x+2)\cos(x^2+x)dx$

5) $\int 3(x+x^2)\sec^2(3x^2+2x^3)dx$

6) $\int e^{3x}\sec(e^{3x}+2)dx$

7) $\int \frac{\cot\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx$

8) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

Cuando los términos en x no se cancelan.

En ocasiones al hacer la sustitución de **u** y **dx**, es posible que no se cancelen todos los términos que contienen a **x**, esto posiblemente no sea señal de que este mal considerada la sustitución seleccionada, si no de que tengamos que realizar un poco mas de operaciones antes de poder visualizar la estructura final de la sustitución, veamos algunos casos en los cuales esto sucede.

Por ejemplo: Deseamos determinar la integral de la función:

$$\int \frac{4x}{(2x-3)^3}dx \qquad (7.1)$$

Como un primer paso la reescribimos como: $\int 4x(2x-3)^{-3}dx$

La cual nos sugiere intentar la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= 2x-3 \\ du &= 2dx \\ dx &= \frac{du}{2} \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Realizando la sustitución y simplificando hasta donde sea posible

$$\int 4x\cdot u^{-3}\frac{du}{2} = \int 2x\cdot u^{-3}du \qquad (7.3)$$

Podemos observar que la sustitución sugerida, no nos permitió el “eliminar” completamente las “x´s”, es decir no hay forma como eliminar las “x´s”.

Bajo estas condiciones podemos hacer lo siguiente: Si después de sustituir la ***u*** aún quedan términos con “x´s”, debemos de reconsiderar la expresión para ***u***, en la cual despejamos la x, y después procedemos a sustituir las “x´s” sobrantes con el despeje obtenido.

Tenemos que: $u = 2x-3$

$$\therefore \quad x = \frac{u+3}{2} \qquad (7.4)$$

Sustituyendo (7.4) en (7.3) tendremos lo siguiente:

$$\int 2\left(\frac{u+3}{2}\right)u^{-3}du = \int (u+3)\cdot u^{-3}du = \int (u^{-2}+3u^{-3})du \qquad (7.5)$$

El resultado final lo obtendremos al aplicar la regla: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Por lo que:

$$\int (u^{-2} + 3u^{-3}) du = \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{3u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{u} - \frac{3}{2u^2} + C \qquad (7.6)$$

Sustituyendo finalmente a la ***u*** por $u = 2x - 3$, en (7.6), obtendremos el resultado final de la integral.

$$\int \frac{4x}{(2x-3)^3} dx = -\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2(2x-3)^2} + C \qquad (7.7)$$

<u>Ejemplo 1</u>. Determinar la siguiente integral:

$$\int 3x\sqrt{2x-1}\,dx \qquad (7.8)$$

Reescribamos la integral como:

$$\int 3x\sqrt{2x-1}\,dx = \int 3x(2x-1)^{1/2} dx \qquad (7.9)$$

La estructura de la función por integrar sugiere la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= 2x-1 \\ du &= 2dx \\ dx &= \frac{2}{du} \end{aligned} \qquad (7.10)$$

Sustituyendo tanto a u como la diferencial de x en (7.9), y simplificando:

$$\int 3x\sqrt{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int x \cdot u^{1/2} du \qquad (7.11)$$

Con lo cual no hemos podido "eliminar" las "x´s", lo que nos indica que debemos reemplazar la "x" por una expresión que contenga ***u***

Se tiene que: $u = 2x - 1$

Por lo que:

$$\therefore \quad x = \frac{u+1}{2} \qquad (7.12)$$

Sustituyendo (7.12) en (7.11), y simplificando se obtiene:

$$\frac{3}{2}\int\left(\frac{u+1}{2}\right)u^{1/2}du=\frac{3}{4}\int(u+1)u^{1/2}du=\frac{3}{4}\int(u^{3/2}+u^{1/2})du$$

Aplicando la regla: $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$, obtendremos la integral en función de u:

$$\frac{3}{4}\int(u^{3/2}+u^{1/2})du=\frac{3}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{5/2}+\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+C=\frac{3}{10}u^{5/2}+\frac{1}{2}u^{1/2}+C \qquad (7.13)$$

Reemplazando $u=2x+1$ en (7.13), obtendremos:

$$\int 3x\sqrt{2x-1}dx=\frac{3}{10}(2x-1)^{5/2}+\frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}+C \qquad (7.14)$$

<u>Ejemplo 2</u>. Demostrar que: $\int\frac{3x}{\sqrt{3x+4}}dx=\frac{2}{9}(3x+4)^{3/2}-8(3x+4)^{1/2}+C$

La integral la podemos reescribir como:

$$\int\frac{3x}{\sqrt{3x+4}}dx=\int 3x(3x+4)^{-1/2}dx \qquad (7.15)$$

La que sugiere la sustitución:

$$\begin{aligned}u&=3x+4\\du&=3dx\\dx&=\frac{du}{3}\end{aligned} \qquad (7.16)$$

Sustituyendo: u y dx de (7.16) en (7.15);

$$\int 3x\cdot u^{1/2}\frac{du}{3}=\int x\cdot u^{1/2}du \qquad (7.17)$$

Como no se simplificaron las x’s, y como $u=3x+4$, entonces tendremos que:

$$x=\frac{u-4}{3} \qquad (7.18)$$

Sustituyendo (7.18) en (7.17) obtenemos:

$$\int\left(\frac{u-4}{3}\right)u^{1/2}du=\frac{1}{3}\int\left(u^{1/2}-4u^{-1/2}\right)du$$

Aplicando nuevamente la regla: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, obtendremos:

$$\frac{1}{3}\int (u^{1/2} - 4u^{-1/2})du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - 4\frac{u^{1/2}}{1/2}\right] + C = \frac{2}{9}u^{3/2} - \frac{8}{3}u^{1/2} + C \qquad (7.19)$$

Reemplazando $u = 3x + 4$ en (7.19), obtendremos:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{3x+4}}dx = \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2} - \frac{8}{3}(3x+4)^{1/2} + C$$

<u>Ejemplo 3</u>.- Compruebe que:

$$\int x^2 \sqrt[3]{2x-9}dx = \frac{3}{80}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{10} + \frac{27}{28}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{7} + \frac{243}{32}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{4} + C$$

Reescribamos la integral como:

$$\int x^2 \left(2x-9\right)^{1/3} dx \qquad (7.20)$$

La estructura nos propone la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= 2x - 9 \\ du &= 2dx \\ dx &= \frac{du}{2} \end{aligned} \qquad (7.21)$$

Sustituyendo (7.21) en (7.20) y simplificando, obtenemos:

$$\int x^2 u^{1/3} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot u^{1/3} dx \qquad (7.22)$$

Podemos observar que en (7.22), no se pudieron simplificar las “x’s”, por lo que debemos de reconsiderar que: si $u = 2x - 9$, tenemos que:

$$x = \frac{u+9}{3} \qquad (7.23)$$

Reemplazando (7.23) en (7.22), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{u+9}{2}\right)^2 u^{1/3} du = \frac{1}{8}\int \left(u^2 + 18u + 81\right)u^{1/3} du = \frac{1}{8}\int \left(u^{7/3} + 18u^{4/3} + 81u^{1/3}\right)du$$

Aplicando la regla de integración: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, se obtiene:

$$\frac{1}{8}\int\left(u^{7/3} + 18u^{4/3} + 81u^{1/3}\right)du = \frac{1}{8}\left(\frac{u^{10/3}}{10/3} + 18\frac{u^{7/3}}{7/3} + 81\frac{u^{4/3}}{4/3}\right) + C \qquad (7.24)$$

Sustituyendo: $u = 2x - 9$ en (7.24), logramos el resultado final:

$$\int x^2 \sqrt[3]{2x-9}\,dx = \frac{3}{80}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{10} + \frac{27}{28}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{7} + \frac{243}{32}\left(\sqrt[3]{2x-9}\right)^{4} + C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el proceso descrito determinar el resultado de las siguientes integrales

1) $\int 2x(x-2)^5 dx$

2) $\int 3x\ \sqrt[3]{2x-1}\ dx$

3) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{x-3}} dx$

4) $\int x^5 (x^3-2)^{4/3}\ dx$

5) $\int 4x\ \sqrt{4x+5}\ dx$

6) $\int x^2\ \sqrt[4]{2x+1}\, dx$

7) $\int 3x^5\ \sqrt[3]{3x^2+1}\ dx$

8) $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^2+3}} dx$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicios: Comprobar las siguientes integrales indicando la sustitución realizada y la formula de integración utilizada.

1) $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$

2) $\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\tan\sqrt{x} + C$

3) $\int \frac{\cos 4x}{1+\operatorname{sen} 4x} dx = \frac{1}{4}\ln\left|1+\operatorname{sen} 4x\right| + C$

4) $\int \sqrt{5x-10}\,dx = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-10)^3} + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

6) $\int e^{\frac{3}{2}x} dx = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C$

7) $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+15}}dx = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+15} + C$

9) $\int 2^{5-3x}dx = -\frac{2^{5-3x}}{3\ln 2} + C$

10) $\int 3\csc 4x \cot 4x dx = -\frac{3\csc 4x}{4} + C$

11) $\int \sec(\pi \cdot x)\tan(\pi \cdot x)dx = \frac{1}{\pi}\sec(\pi \cdot x) + C$

12) $\int 2\,\text{sen}^2(3x)\cos(3x)dx = \frac{2\,\text{sen}^3(3x)}{9} + C$

13) $\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C$

14) $\int 8x\,\text{sen}\, x^2 dx = -4\cos x^2 + C$

15) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2(9x)} = -\frac{1}{9}\cot(9x) + C$

16) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\,\text{sen}\, x+1}}dx = \sqrt{2\,\text{sen}\, x} + C$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Utilizando el método de sustitución, efectúe cada una de las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt{2x+3}dx$

b) $\int \frac{1}{3x+4}dx$

c) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+5}}dx$

e) $\int \frac{x^4}{x^5+16}dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+5}}dx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

i) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$

j) $\int e^{5x}dx$

k) $\int xe^{4x^2}dx$

l) $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$

m) $\int \frac{10}{x\log x}dx$

n) $\int \frac{x}{\sqrt{4x+2}}dx$

o) $\int \frac{x-5}{(x+5)^{2/3}}dx$

p) $\int 2x^3(1+x^2)^{3/2}dx$