



CÁLCULO DE LÍMITES

Si $f(x)$ es una función (polinomial, racional, radical, exponencial, etc.), y está definida en un punto a , entonces, se suele cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Lo que nos indica que para calcular el límite de una función, cuando x tiende a un número real (a), es suficiente con aplicar las reglas de cálculo indicadas, sustituyendo la variable independiente por el valor real al que la x tiende (a). El decir el límite es simplemente el valor de la función en a .

Ejemplos: a) $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 5x - 10) = -(2)^2 + 5(2) - 10 = -4 + 10 - 10 = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 12} = \frac{(3)^2 - 9}{(3)^2 - (3) - 12} = \frac{9 - 9}{9 - 3 - 12} = \frac{0}{-6} = 0$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES	
Si a, c, L y M son numero reales y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$	
Límite de la función constante	$\lim_{x \rightarrow a} (c) = c$
Límite de la función identidad.	$\lim_{x \rightarrow a} (x) = a$
Límite de una suma/resta de funciones	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
Límite de una constante por una función	$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$
Límite de un producto de funciones	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$
Límite de un cociente de funciones.	$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$
Límite de la potencia de una función.	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$

En ocasiones la función no está definida en algún punto x_0 de la recta real; por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$, no está definida para el valor, ya que su dominio es

$D = \mathbb{R} - \{-5, 2\}$, más sin embargo si podemos calcular su límite al tomar valores de su dominio tan cercano al punto x_0 como queramos, es decir si podemos establecer

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ al tomar valores de su dominio tan cercanos a 2 como queramos. Al hacer

esto podemos deducir que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \frac{4}{7}$, que se puede leer como: **El límite de f de x**

cuando x tienda a 2 es igual a $\frac{4}{7}$

LIMITES CUANDO $x \rightarrow \pm \infty$

El símbolo ∞ no representa un número real. Se utiliza para describir el comportamiento de una función cuando los valores de su dominio rebasan toda cota finita. Cuando decimos “el limite de f cuando x tiende a infinito”, nos referimos al limite de f cuando x aumenta cada vez más hacia la derecha de la recta numérica. Cuando decimos “límite cuando x tiendo a menos infinito ($-\infty$), nos referimos al límite cuando x se mueve cada más hacia la izquierda de la recta numérica. (En cada caso el límite puede o no puede existir)

ÁLGEBRA DE LÍMITES INFINITOS	
SUMA	COCIENTE
$\infty + c = \infty$	si $c \neq 0$ $\frac{c}{0} = \infty$ $\frac{\infty}{0} = \infty$ $\frac{\infty}{c} = \infty$
$\infty - c = \infty$	si $c \neq 0$ $\frac{0}{c} = 0$ $\frac{0}{\infty} = 0$ $\frac{c}{\infty} = 0$
$\infty + \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$ Indeterminación
$\infty - \infty$ Indeterminación.	$\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación
PRODUCTO	POTENCIA
si $c \neq 0$ $c \cdot \infty = \infty$	si $n > 0$ $(\infty)^n = \infty$
$\infty \cdot \infty = \infty$	si $n < 0$ $(\infty)^n = 0$
si $c = 0$ $0 \cdot \infty$ Indeterminación.	I^∞ Indeterminación
	0^0 Indeterminación
	∞^0 Indeterminación

PARA CALCULAR LÍMITES:

A- **Siempre** sustituya el valor de tendencia en la función dada.

Si es posible evaluar la función en ese valor, el valor del límite será igual al valor de la función evaluada en ese valor. Es decir *el límite es simplemente el valor de la función evaluada en a*.

B- : **Si no fue posible establecer un valor y se obtuvo una indeterminación**, entonces se tendrá que hacer algo más de trabajo algebraico para determinar el límite.

Cuando la sustitución no trabajaba sobre la función original –regularmente porque la función tiene un hueco en ese valor- se tiene que hacer uso de algún procedimiento algebraico que permita sortear esta situación y la sustitución pueda realizarse.

Por lo que el objetivo de los métodos algebraicos por aplicar es la de **“si la sustitución no trabaja sobre la función original, la función se debe manipular algebraicamente hasta que la sustitución se pueda realizar”**

Apliquemos estas sugerencias a los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Determinar el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

A- Sustituamos el valor de tendencia $x = 1$ en la función dada:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1} = \frac{(1)^2 + 5(1) + 1}{(1) + 1} = \frac{7}{2}$$

El reemplazo de x por el 1 nos dio el valor de $\frac{7}{2}$, es decir pudimos evaluar la función, por lo que el proceso de calcular el límite termina.

Es decir, **el límite de** $\frac{x^2 + 5x + 1}{x + 1}$ **cuando x tienda a 1 es igual a** $\frac{7}{2}$

Ejemplo 2. : Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

A- Reemplazando el valor de tendencia $x = 3$ en la función dada:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3 - 3}{(3)^2 + 2(3) - 3} = \frac{0}{9 - 6 - 3} = \frac{0}{0}$$

Al realizar la sustitución no se logró un valor definido, se obtuvo una **indeterminación**, por lo que es necesario aplicar un procedimiento algebraico que remueva esta indeterminación y permita evaluar la función. Por lo que debemos aplicar el plan **B**.

B Sabemos por factorización que: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, al reemplazar los términos $x^2 - 2x - 3$ por su factorización, la función podemos reescribirla en la forma:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 1)}$$

en la cual podemos reducir el término $(x - 3)$ tanto del denominador como del numerador ya que $\frac{x - 3}{(x - 3)} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x - 3}}{(\cancel{x - 3})(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 1}$$

Logrando con esto una expresión en la que ya es posible realizar la sustitución:

$$\text{Por lo que } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{(3) + 1} = \frac{1}{4}$$

Que se lee como: **El límite de** $\frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ **cuando x tienda a 3 es igual a** $\frac{1}{4}$

Ejemplo 3:- Deducir el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 3}$

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 3} = \frac{(-3)^2 - 3(-3) + 3}{(-3) - 3} = \frac{9 + 9 + 3}{-6} = \frac{21}{-6}$$

Por lo que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{7}{2}$ (no es necesario aplicar el plan B).

Ejemplo 4: Establecer el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 6x^2}{2x^4 + x^2}$

A. Reemplacemos el valor de tendencia $x = 0$ en la expresión dada:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 6x^2}{2x^4 + x^2} = \frac{4(0)^3 + 6(0)^2}{2(0)^4 + (0)^2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

B. Como se obtuvo una indeterminación, tendremos que manipular algebraicamente la función proporcionada.

Revisando la expresión podemos establecer que todos los términos de la función racional, tienen como factor común a x y al factorizarlo con el mínimo exponente con la que aparece:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 6x^2}{2x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(4x+6)}{x^2(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2}(4x+6)}{\cancel{x^2}(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+6}{2x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 6x^2}{2x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+6}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(0)+6}{2(0)^2+1} = \frac{6}{1} = 6$$

Con lo que
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 6x^2}{2x^4 + x^2} = 6$$

Ejemplo 5. Averiguar el siguiente límite.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$$

A. Coloquemos el valor de tendencia $x = 0$ en la expresión dada:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \frac{(0+2)^2 - 4}{0} = \frac{(2)^2 - 4}{0} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

B. Al obtenerse una indeterminación, tendremos realizar una tarea algebraica, extra.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 4 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x}{x}$$

Ya expresada la función en forma diferente, volvemos a evaluar la expresión resultante en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x}{x} = \frac{(0)^2 + 4(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

C. Como se consiguió por segunda vez una indeterminación, tendremos que operar nuevamente en forma algebraica la reexpresión de la función.

Al revisar la última forma de la función, observamos que todos los términos contienen a x , por lo que es posible factorizarla tanto del numerador como del denominador con la mínima potencia de toda la expresión.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+4)$$

Una vez simplificada la expresión, volvamos a evaluar la expresión resultante en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+4) = (0) + 4 = 4$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = 4$$

Ejemplo 6: Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16}$

A. Reemplacemos el valor de tendencia $x = 4$ en la expresión dada:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = \frac{(-4)^2 + (-4) - 12}{(-4)^2 - 16} = \frac{16 - 4 - 12}{16 - 16} = 0$$

B. Al conseguir una indeterminación, tendremos que reformular nuestra función.

Con la factorización se logra que: $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$ y también que: $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$, sustituyendo esto en la función dada

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x+4)}(x-3)}{\cancel{(x+4)}(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)}{(x-4)}$$

Una vez simplificada la expresión, volvemos a calcular la expresión resultante con $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)}{(x-4)} = \frac{-4-3}{-4-4} = \frac{-7}{-8} = \frac{7}{8}$$

Por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} = \frac{7}{8}$$

Ejemplo 7. Determinar

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación*

B. Multiplicando ambos términos por el conjugado de $\sqrt{x} - 1$, que es $\sqrt{x} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - (1)^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Por lo que:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 8. Evaluar
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}\right)}{x}$$

A.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}\right)}{x} = \frac{\left(\frac{1}{0+3} - \frac{1}{3}\right)}{0} = \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación.}$$

B. Sumando los términos del denominador y simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3-(x+3)}{3(x+3)}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3-x-3}{3(x+3)}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{x}}{3\cancel{x}(x+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(x+3)} = \frac{-1}{3(0+3)} = -\frac{1}{9}$$

Ejemplo 9. Establecer el siguiente límite:
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1}$$

A.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{-1+1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Ejemplo 10. Establecer el siguiente límite
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+4}\right)}$$

A.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+4}\right)} = \frac{1-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+4}\right)} = \frac{1-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$B. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{x+4-5}{5(x+4)}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{x-1}{5(x+4)}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+4)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x+4)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+4) = 5(1+4) = 25$$

Ejemplo 11. Averiguar el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 4x^2 + 10}$

$$A. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 4x^2 + 10} = \frac{4(\infty)^3 + 5(\infty)^2 + 6(\infty) - 1}{2(\infty)^3 - 4(\infty)^2 + 10} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminación}$$

B. Dividiendo cada termino por la máxima potencia de x (x^3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 4x^2 + 10} = \frac{4(\infty)^3 + 5(\infty)^2 + 6(\infty) - 1}{2(\infty)^3 - 4(\infty)^2 + 10} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 4x^2 + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} + \frac{10}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{4}{x} + \frac{10}{x^3}}$$

Como sabemos $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 4x^2 + 10} = \frac{4 + 0 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$