LA INTEGRAL COMO ANTIDERIVADA

La integración tiene dos interpretaciones distintas 1) como procedimiento inverso de la diferenciación, y 2) como método para determinar el área bajo una curva. Cada una de estas interpretaciones tiene numerosas aplicaciones, como se ira mostrando en el desarrollo del con concepto de integración.

En primer termino, la integración puede considerarse el proceso inverso de la diferenciación, esto es, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original, siempre y cuando se especifique de manera precisa la constante de integración; ya que de otra forma el resultado puede diferir de la función original en una constante.

En este contexto la integración se considera como: la operación de obtener una función cuando se conoce su derivada o tasa de cambio.

En un segundo aspecto, también puede definirse como el proceso de encontrar el valor limite de una suma de términos cuando el número de éstos crece indefinidamente y el valor numérico de cada termino de aproxima a cero, este es el caso en el que la integración se interpreta como la determinación del área bajo una curva. El cual será desarrollado al tratar el tema de integral definida.

En uno u otro contexto, la integración requiere operacionalmente el que se determine una función cuando se ha dado o se conoce su derivada.

En este texto analizaremos la primera de las dos interpretaciones, como proceso inverso de la diferenciación, que es el de *“encontrar la función cuando se conoce su derivada”*.

Iniciaremos la exposición obteniendo antiderivadas sencillas, tomando como base las primeras reglas de derivación, a continuación examinando otras reglas de derivación elaboraremos una primera tabla de integrales inmediatas y por último trabajaremos con algunas propiedades esenciales a la integral definida, que en unión con las integrales inmediatas permitirá encontrar la integral indefinida o antiderivada general de una función cuya estructura es relativamente simple.

LA ANTIDERIVADA

Al proceso de obtención de una función a partir de su derivada se denomina **antiderivación** o **integración**.

Es decir el proceso de integración, consiste en determinar la función cuya derivada se conoce; con lo que el objetivo principal radica en hallar la función que da origen a esta derivada.

Si a un número positivo le calculo su raíz positiva, al elevar esta raíz al cuadrado obtengo el número positivo original, es decir la segunda operación anula a la primera, ya que me permite recuperar el número original. Por lo que decimos que estas dos operaciones son *operaciones inversas*. Múltiples ramas de las matemáticas contienen pares de operaciones inversas entre sí, como: la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, la exponenciación y la radicación, los logaritmos y los antilogaritmos.

Durante el primer curso de Cálculo se estudio la derivación; y el segundo curso incluye su inversa que es la *antiderivación*.

Comenzaremos dando una definición de lo que vamos a considerar como antiderivada:

Definición. Llamamos a ***F(x) una antiderivada de f*** en el intervalo ***I*** si $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ en I, es decir, si ***F´(x)=f(x)*** para toda *x* en *I*.

Hemos usado la frase *una* antiderivada en vez de *la* antiderivada en la definición, mediante los siguientes ejemplos exponemos el porqué la llamamos de esa forma.

EJEMPLO 1. Dada la función $f(x)=4x^3$, ¿Qué función al derivarla nos da $f(x)$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$?, es decir, ¿Cuál es la antiderivada de $f(x)=4x^3$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$?

Solución. Buscamos una función *F* que satisfaga la igualdad $\frac{dF(x)}{dx}=4x^3$ para toda x real. Al utilizar nuestro conocimiento sobre derivación, sabemos que $F(x)=x^4$ es la función buscada.

¿Pero es la única función que tiene como derivarla a $f(x)=4x^3$?

Un momento de reflexión nos dirá que ***NO,*** que hay otras funciones que cumplen con la condición de que su derivada es $f(x)=4x^3$.

Por ejemplo la función $F(x)=x^4+7$, satisface también la igualdad $F'(x)=x^3$; por lo tanto, es una segunda antiderivada de *f(x)=4x*^{3}, pero también la función $F(x)=x^4-17$, cumple con $F'(x)=x^3$, por lo que hay una tercera antiderivada de *f(x)=4x*^{3} y aún más las siguientes funciones tienen en común que $F'(x)=x^3$

a) $F(x)=x^4-1$

b) $F(x)=x^4-\frac{2}{3}$

c) $F(x)=x^4+3$

d) $F(x)=x^4+\frac{5}{2}$

Todas estas funciones tienen la misma derivada y la única diferencia entre ellas es la constante, por lo que si *F(x)* es una antiderivada de f(x), todas las antiderivadas de f(x) estarán incluidas en el conjunto ***F(x) + C***, donde C es una constante cualquiera.

Por lo que podemos concluir que; **F(x)=x⁴ + C**, donde *C* es cualquier constante, es la antiderivada general de $4x^3$ en (-∞,∞).

Surge ahora una importante pregunta. ¿Es toda antiderivada de $f(x)=4x^3$ de la forma $F(x)=x^4 + C$?

La respuesta es afirmativa, ya que al derivar F(x) obtenemos que: $\frac{dF(x)}{dx} = 4x^3$

EJEMPLO 2. Encuentre la antiderivada general de $f(x) = x^2$ en el intervalo (-∞,∞).

Solución. Sabemos que al derivar la función $F_1(x) = x^3$ obtenemos que la derivada es $3x^2$. Pero esta difiere de $f(x) = x^2$, en que la derivada de $F_1(x) = x^3$ contiene a x^2 multiplicada por 3, de lo cual surge la idea de proponer como una antiderivada a $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Derivando esta función comprobamos que se satisface la igualdad establecida.

$$F'(x) = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$$

Al Igual que en el ejemplo 1 existen otras antiderivadas de la función $f(x) = x^2$, como son:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{4}$$

Por lo que la antiderivada general de $f(x) = x^2$ es

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Revisando estos dos ejemplos podemos deducir que:: Si una función *f(X)* tiene una antiderivada, tendrá una familia completa de ellas y cada miembro de ésta se puede obtener de otro de ellos mediante la adición de la constante adecuada. Llamaremos a esta familia de funciones la **antiderivada general** de *f*. Después de acostumbrarnos a esta noción, omitiremos el adjetivo general.

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN.

Llamaremos *integral indefinida* de la función *f(x)*, al conjunto de todas las antiderivadas de la función *f(x)*, y la denotaremos como:

$$\int f(x)dx$$

Esta expresión se lee ***«integral de la función f(x) con respecto a la variable x»***.

Por lo desarrollado anteriormente sobre la antiderivada, ***si F(x) es una antiderivada de f(x),*** *entonces:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde *C* representa una constante llamada *constante de integración.*

Como paso inicial para determinar la integral indefinida de una función *f(x)*, obtengamos una expresión para determinar la antiderivada de la función $f(x) = x^n$.

Para encontrar la antiderivada general o la integral indefinida de esta función analizaremos algunos casos;

1. ¿Qué función tiene como derivada 1? sabemos que $\frac{d}{dx}(x) = 1$ por lo que podemos deducir que $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$

2. ¿Cuál función posee como derivada a x? Recordemos que $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}(2x)=x$, con lo que podemos establecer que $\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}+C$
3. ¿Qué función al derivarla nos da x^2? Nos percatamos que $\frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3})=\frac{1}{3}(3x^2)=x^2$ con lo que afirmamos que $\int x^2\cdot dx=\frac{x^3}{3}+C$
4. La función cuya derivada es x^3, la podemos deducir rápidamente al observas que $\frac{d}{dx}(\frac{x^4}{4})=\frac{1}{4}(4x^3)=x^3$ por lo que $\int x^3\cdot dx=\frac{x^4}{4}+C$.
5. De una forma análoga, la función que tiene como derivada a x^4, es $\int x^4\cdot dx=\frac{x^5}{5}+C$
6. Luego la antiderivada general de x^5 es: $\int x^5\cdot dx=\frac{x^6}{6}+C$
7. Analizando los casos 1 al 6 podemos concluir que $\boxed{\int x^n\cdot dx=\frac{x^n}{n+1}+C}$

Ejercicio: Tomando como base la expresión $\boxed{\int x^n\cdot dx=\frac{x^n}{n+1}+C}$ determine las siguientes integrales indefinidas

1. $\int x^6 dx$ Es una integral para la cual *n es igual a 6*.

$$\int x^6 dx=\frac{x^{6+1}}{6+1}+C=\frac{x^7}{7}+C$$

2. $\int \frac{1}{x^4}dx$ Reescribiendo la función para que tenga la estructura señalada:

$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx$$ en la cual n = -4

$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

por lo tanto $$\int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3} + C$$

3. $\int x^2 \sqrt[3]{x}dx$

Escribiendo $\sqrt[3]{x}$ en forma de potencia $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ y por la propiedad del producto de números con la misma base,

$$x^2 \sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{1/3} = x^{\frac{7}{3}}$$

Por lo que tenemos un caso con $n = \frac{7}{3}$

$$\int x^2 \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{7}{3}}dx = \frac{x^{7/3+1}}{\frac{7}{3}+1} + C$$

$$\int x^2 \sqrt[3]{x}dx = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{10} + C$$

INTEGRALES INMEDIATAS

De la derivación de funciones elementales, podemos deducir las correspondientes integrales llamadas inmediatas.

1.- Como $\frac{d}{dx}(x + C) = 1$ entonces tenemos que: $\int 1 \cdot dx = x + C$

2.- Si $\frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C) = x^n$, entonces tendremos que: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3.- Para $\frac{d}{dx}(\ln x + C) = \frac{1}{x}$, de lo cual obtenemos: $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

4.- Se vio que $\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$, obteniéndose que $\int e^x dx = e^x + C$

5.- Se sabe que $\frac{d}{dx}(senx + C) = cos\, x$, por lo que: $\int cos\, x \cdot dx = senx + C$

y podríamos continuar analizando de forma similar las demás reglas de derivación y sus integrales correspondientes, que al resumirlas nos permiten obtener la siguiente tabla de integrales inmediatas.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

1) $\int dx = x + C$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \mathrm{n} \neq 1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \operatorname{sen} x \cdot dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen} x + C$

6) $\int \sec^2 x \cdot dx = tanx + C$

7) $\int \csc^2 x \cdot dx = -\cot x + C$

8) $\int \sec x \cdot tanx \cdot dx = \sec x + C$

9) $\int \csc x \cdot \cot x \cdot dx = -\csc x + C$

10) $\int e^x dx = e^x + C$

11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ para a>0, a $\neq$ 1

12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{\mathrm{a}} arc\, tan\left(\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{\mathrm{a}} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Aplicaremos rápidamente algunas de estas integrales.

Ejercicios.

1- Calcular $\int 3^x dx$

Es una integral inmediata perteneciente al caso 12 en el que *a* = 3.

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{ln 3} + C$$

2.- Calcular $\int \frac{dx}{9+x^2}dx$

Esta integral tiene la estructura del caso 13 con a= 3, por lo que:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

3.- Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Revisando nuestro formulario se ajusta al numero 14 con a = 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Antes de intentar resolver otros problemas es conveniente el establecer algunas propiedades que son de gran utilidad al aplicarlas en el calculo de antiderivadas o de las integrales indefinidas.

Propiedades de la integral indefinida.

Al igual que en la diferenciación se tienen propiedades, las cuales brindan apoyo en la obtención de la antiderivada de distintos tipos de funciones, en casos que involucran mayor grado de reducción dificultad.

La integral de una constante multiplicada por una función, nos indica que:

1.- $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$

Es decir la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

La integral de una suma de funciones, señala que

2,- $\int \left(f(x) + g(x) - h(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)$

Es decir la integral de una suma o diferencia de funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales.

Mostraremos su aplicación en los siguientes ejemplos:

1.- Calcular $\int 10x^5 dx$

Es una integral inmediata perteneciente al 2° caso, en el que *n = 5* y se aplica la propiedad 1 con k = 10.

$$\int 10x^5 dx = 10\int x^5 dx = 10(\frac{x^{5+1}}{5+1}) + C = \frac{10x^6}{6} + C$$

simplificando fracciones: $\int 10x^5 dx = \frac{5x^6}{3} + C$

2.- Calcular $\int \frac{1}{5x^3} dx$

La cual cae en el 2° caso con n = -3, y aplicando la propiedad 1 con $k = \frac{1}{5}$

$$\int \frac{1}{5x^3} dx = \frac{1}{5}\int x^{-3} dx$$

$$\int \frac{1}{5x^3} dx = \frac{1}{5}\int x^{-3} dx = \frac{1}{5}\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + C = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2x^{-2}}\right) + C$$

por lo tanto $\int \frac{1}{5x^3} dx = -\frac{1}{15x^2} + C$

3.- Calcular $\int 7x^4 \sqrt{16x^3} dx$

Escribiendo $\sqrt{16x^3}$ en forma de potencia $\sqrt{16x^3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^3} = 4x^{\frac{3}{2}}$

Por la propiedad del producto de potencias de la misma base,

$$7x^4 \sqrt{16x^3} = 7x^4 \cdot 4x^{\frac{3}{2}} = 28x^{\frac{11}{2}}$$

Por tanto, tenemos el 2° caso con $n = \frac{11}{2}$ y aplicando la propiedad 1 con $k = 28$

$$\int 7x^4\sqrt{16x^3}\,dx=\int 28x^{\frac{11}{2}}dx=28\int x^{\frac{11}{2}}dx=28\left(\frac{x^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1}\right)+C$$

$$=28\left(\frac{x^{\frac{13}{2}}}{\frac{13}{2}}\right)+C=\frac{56}{13}\sqrt{x^{\frac{13}{2}}}+C$$

4.- Calcular $\int 9\cdot 4^x\,dx$

Es una integral inmediata perteneciente al caso once en el que la base *a* = 4.

$$\int 9\cdot 4^x\,dx=9\frac{4^x}{\ln 4}+C=\frac{9\cdot 4^x}{\ln 4}+C$$

Ejercicios resueltos:

Calcular las siguientes integrales empleando las reglas y propiedades de integración.

1) $\int 5x^3\cdot dx=5\int x^3\cdot dx=5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{5}{4}x^4+C$ por la propiedad 1 con k = 5 y la regla 2 con n = 3.

2) $\int[6x^2-8x+3]dx=\int 6x^2dx-\int 8xdx+\int 3dx$

$$=6\int x^2dx-8\int xdx+3\int dx=6\frac{x^{2+1}}{2+1}-8\frac{x^{1+1}}{1+1}+3x+C$$

$=\frac{6}{3}x^3-\frac{8}{2}x^2+3x+C=2x^3-4x^2+3x+C$ por las propiedades 1 y 2, y las reglas 1 y 2.

3) $\int x(x+2)(x-3)dx = \int\left(x^3 - x^2 - 6x\right)dx = \int x^3dx - \int x^2dx - 6\int xdx$ =

$\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + C$ primero se realiza el producto de polinomios y luego se aplicaron la propiedad 2 y la regla 2.

4) $\int \frac{7dx}{x} = 7\int \frac{dx}{x} = 7\ln|x| + C = \ln|x|^7 + C$ por la propiedad 2 con k = 7 y la regla 3.

5) $\int -\frac{dx}{3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{3}\ln|x| + C = \ln\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}} + C$ por la propiedad 1 k = $\frac{1}{3}$ y la regla 3.

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3}dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$ primero se reexpresó la raíz cúbica y se aplico la regla 4 con n = -$\frac{1}{3}$

7) $\int 10\operatorname{sen} xdx = 10\int \operatorname{sen} xdx = 10(-\cos x) + C = -10\cos x + C$ por la propiedad 1, con k = 10 y la regla 4.

8) $\int -2\cos xdx = -2\int \cos xdx = -2\cdot\operatorname{sen} x + C$ por la propiedad 1 con k = - 2 y la regla 5.

9) $\int 4tan^2 xdx = \int 4\left(\sec^2 x - 1\right)dx = 4\left[\int \sec^2 x\cdot dx - \int dx\right] = 4(tanx - x) + C$

primero se sustituyo la tangente cuadrada mediante la identidad $tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y se aplicaron las propiedades 1 y 2 y las reglas 1 y 6.

10) $\int \cot^2 x dx = \int \left(\csc^2 x - 1\right) dx = \int \csc^2 x \cdot dx - \int dx = -\cot x - x + C$

primero se sustituyo la cotangente cuadrada mediante la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y se aplicaron las propiedades 1, 2 y las reglas 2 y 7

11) $\int \frac{dx}{16 + x^2} = \frac{1}{4} arctan(\frac{x}{4}) + C$ por la regla 12 con a = 4

12) $\int \frac{7dx}{9 + x^2} = 7\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{7}{3} arctan(\frac{x}{3}) + C$ por la propiedad 1 con k=7, la regla 12 con a=3

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = arcsen(\frac{x}{2}) + C$ por la regla 13 con a = 2.

14) $\int -9e^x dx = -9\int e^x dx = -9e^x + C$ por la propiedad 1 con k = -9 y la regla 10.

15) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln x} + C$ por la regla 11 con a = 5.

16) $\int \left(3x^3 + \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{e^x}{6} + 1\right) dx = 3\int x^3 dx + 4\int x^{-3} dx - 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int e^x dx + \int dx$

$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{6}e^x + x + C$ al aplicar las propiedades 1 y 2 y las 1, 2, 3 y 10.

17) $\int \left(x^e + e^x\right) dx = \int x^e dx + \int e^x dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x + C$ al aplicar la regla 4 con n = e y la reglas 2 y 10

18) $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 4x\right) dx = -\frac{1}{5}\int x^{2/3} dx - \frac{7}{2}\int x^{-1/2} dx + 4\int x dx$

$-\frac{1}{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{7}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + C = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{x^5} - 7\sqrt{x} + 2x^2 + C$ al aplicar las reglas propiedades 1 y 2 y la regla 2.

19) $\int\left(ex+\frac{e}{x}\right)dx = e\int x\cdot dx + e\int\frac{dx}{x} = e\cdot\frac{x^2}{2} + e\ln x + C = e\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)+C$ por las propiedades 1 y 2 y las reglas, 2 y 3.

20) $\int\left(e^{x+3}+xe^2-3\right)dx = e^3\int e^x dx + e^2\int xdx - 3\int dx = e^{x+3}+\frac{xe^2}{2}-3x+C$ al aplicar las propiedades 1 y 2 y las reglas 1, 2 y 10.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resuelve los siguientes problemas indicando las propiedades y las reglas de integración aplicadas.

1) $\int 7dx$ 2) $\int\frac{5dx}{3x}$ 3) $\int\frac{(2x-3)}{5}dx$

4) $\int(3x^2-4x+1)dx$ 5) $\int\left(\frac{e^x}{4}-3x\right)dx$ 6) $\int\frac{2x^2-4x+1}{\sqrt{x}}dx$

7) $\int 2x(x-3)(x+4)dx$ 8) $\int\left[4x+(1+x)^2\right]\cdot dx$ 9) $\int\left(\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{7}\right)dx$

10) $\int\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 11) $\int\frac{6dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 12) $\int\frac{-2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

13) $\int\frac{10dx}{25+x^2}$ 14) $\int\frac{8dx}{12+3x^2}$ 15) $\int\frac{1}{25+9x^2}dx$

16) $\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$ 17) $\int 4^x dx$ 18) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$

19) $\int\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx$ 20) $\int\left(2sen\ x-3\cos x\right)dx$ 21) $\int\left(4e^x-\frac{5}{e^{-x}}\right)dx$

22) $\int\left(3x^2-5\cos x+9e^x\right)dx$ 23) $\int e^{x+2}dx$ 24) $\int\frac{4+2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

25) $\int\frac{tanx}{\sec x}dx$